
Schriftenreihe der Forstwissenschaftlichen Fakultät
der Universität München
und der
Bayerischen Landesanstalt für Wald und Forstwirtschaft

WAVELET-TRANSFORMATION UND NEURONALE NETZE ALS VERFAHREN
DER DIGITALEN SIGNALVERARBEITUNG
FÜR FORSTWISSENSCHAFTLICHE ANWENDUNGEN

von
Heinz Breinlinger

Bayerische Landesanstalt für Wald und Forstwirtschaft
und
Lehrbereich für Biometrie und Angewandte Informatik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

Hohenbachernstr. 22
D-85354 Freising

ISSN-0174-1810

Alle Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung vorbehalten.

Herausgeber:

Forstwissenschaftliche Fakultät
der Universität München und
Bayerische Landesanstalt für
Wald und Forstwirtschaft

Verantwortlich:

Der Dekan der Forstwissenschaftlichen
Fakultät und der Leiter der
Bayerischen Landesanstalt für Wald und
Forstwirtschaft

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. Hans-Dietrich Quednau

Anschrift des Verfassers:

Heinz Breinlinger
Bayerische Landesanstalt für Wald und
Forstwirtschaft
Hohenbachernstr. 20, D-85354 Freising

Dokumentation:

Forstl. Forschungsber. München
Nr. 148, 1995, 99 S.

Zu beziehen über die Universitätsbuchhandlung Heinrich Frank
Schellingstr. 3, D-80799 München

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Einleitung

1

Von Fourier zu Wavelets

4

Wavelet-Transformation

14

Multilayer-Perceptron und Fuzzy-Control

52

Diskussion

69

Zusammenfassung

81

Verwandte Literatur

82

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	7
Einleitung	1
Von Fuzzy zu Wavels	4
Wavels-Transformation	14
Fuzzy-Perception und Fuzzy-Control	23
Klassifizierung	38
Zusammenfassung	81
Formale Literatur	82

Vorwort

Vorliegende Arbeit entstand parallel zu einem Kuratoriums-Projekt "Videotechnik in der Fernerkundung" am Sachgebiet III der *Bayerischen Landesanstalt für Wald und Forstwirtschaft*, in dessen Rahmen Software zu Analog-Darstellung, digitaler Verarbeitung und Druckausgabe von Videodaten unter graphischer Nutzeroberfläche grundlegend zu entwickeln war.

Da Signal- und Bildverarbeitung mit ihren Kernproblematiken

- Datenreduktion
- Merkmalsextraktion und
- Klassifikation, bzw. Auswertung

elementare Fragestellungen aller quantitativen Disziplinen berühren, stellt die Abhandlung am Beispiel der Mustererkennung in Videobildern in der Aufeinanderfolge von **Wavelet-Analyse** und **Neuro-(Fuzzy)-Netzen** 2 moderne Verfahren zu Reduktion, Informationsextraktion und Klassifikation von Datensätzen vor, welche unabhängig voneinander auf nahezu alle messenden und modellbildenden Fachrichtungen übertragbar sind.

Die potentielle forstliche Bandbreite reicht hierbei von Zeitreihenanalysen und Datensatzminimierung über zerstörungsfreie akustische Qualitätskontrolle von Holzwerkstoffen und Rohholz bis hin zur Klassifikation von Untergrundschallprofilen nach bodenkundlichen Parametern oder einer "Wavelet-Transformations-Infrarot-Spektroskopie" in der Holzforschung mit wesentlich verbesserter Trennschärfe.

Meinem hochgeschätzten Mentor, Herrn Prof. Dr. Quednau vom *Lehrbereich für Biometrie und Angewandte Informatik*, danke ich für ein hervorragendes Arbeitsklima mit großem Gestaltungsspielraum, dem Leiter des Sachgebietes III, Herrn FD Dr. Mößner, für seine unverzichtbare Unterstützung und der Hanskari-Goetting-Stiftung mit Ihrem Vorsitzenden, Herrn Präsident Dr. Braun, für eine großzügige Förderung, ohne welche eine Drucklegung in dieser Reihe nicht möglich geworden wäre.

Die erste Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer an der Veranstaltung ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen. Die zweite Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Die dritte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Die vierte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Die fünfte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen. Die sechste Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Die siebte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen. Die achte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Die neunte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen. Die zehnte Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer ist die Gruppe der Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Veranstaltung teilnehmen.

Einleitung

Kompression, Merkmalsextraktion und automatisierte Analyse vieldimensionaler Datensätze werden in naturwissenschaftlichen Fachrichtungen nicht zuletzt dank globaler Expansion des Information-Highway und neuer Digitaltechniken, vor allem aber im Zuge zunehmender Analytik in immer kürzeren Meßintervallen und Informationszyklen bei einer wachsenden Zahl von Interessentfeldern ausschlaggebende Bedeutung gewinnen.

Exemplarisch für neue Monitoring-Aufgaben mit hohen Datenvolumina seien hier die Bayerischen Waldklimastationen angeführt.

Verkürzte Halbwertszeiten und wachsende Datendimensionalität stehen nicht selten trotz vielfach moderner Geräte in die Jahre gekommenen Auswerteverfahren gegenüber.

Kenntnis der Neuentwicklungen in angewandter Mathematik und Informatik, welche den Kernbereich der messenden und modellbildenden Disziplinen berühren, beschränkt sich nach Erfahrung des Autors häufig auf Schlüsselbegriffe und findet nicht immer den Weg über quantitatives Verständnis zu konkreter Implementierung im jeweiligen Forschungsschwerpunkt.

Mit Einführung der Videotechnik in die forstliche Fernerkundung etwa entstehen durch geringe Auflösung und Kanalzahl Klassifikationsprobleme, welche über herkömmliche Signatúrauswertungen einzelner Pixel nicht lösbar sind und sich auf textuelle Merkmale konzentrieren müssen.

In Bezug auf Merkmalsgewinnung, Datenreduktion und Klassifizierung liegen somit Kernprobleme naturwissenschaftlicher Fachrichtungen vor, für welche über Verknüpfung des Fourier-Pendants **Wavelet-analyse** mit einem überwachtem "lernenden" **Neuro-Fuzzy-Netz** 2 moderne, auf viele Anwendungen übertragbare Verfahren vorgestellt werden sollen.

Die methodische Verbindung der beiden prinzipiell unabhängigen Methoden im Zuge der Bildverarbeitung zeigt das Schema S. 3, wobei anhand der Problematik automatischer Texturerkennung in Videobildern der Fernerkundung die *mehrdimensionale Wavelet-Transformation* für die Merkmalsextraktion neben einem *fuzzy-geregelten Multilayer-Perceptron* zur Klassifikation der Merkmalsvektoren ein weithin übertragbares mathematisches Gesamtmodell bilden, dessen Ableitung hinsichtlich der Angewandten Informatik so pragmatisch wie möglich gehalten wurde.

Ein *Multilayer-Perceptron* ist ein in Weierstraß'schem Sinne universeller Approximator, welcher aus einer Menge bekannter Ein- Ausgabezuordnungen eine Abbildungsfunktion des Entscheidungsraumes bezüglich der Stichprobenstützstellen über einen fehlerinduzierten Gradientenabstieg im Parameterraum des Netzes iterativ dergestalt annähert, daß die Wahrscheinlichkeit des Interpolationsfehlers, mithin das Risiko der Abweichung zum Abbildungspolynom der Grundgesamtheit, hinsichtlich der Verallgemeinerungsgüte aufgrund der wirksameren Randbedingungen geringer bleibt als diejenige des mathematisch verwandten (vollständigen) Polynomansatzes.

Die Dimension der exemplarischen Fragestellung erfordert jedoch wie die meisten Echt-Welt-Probleme eine eingehende entscheidungstheoretische Modellbildung, deren Resultat sich in Netzarchitektur und Algorithmus niederschlagen.

Aufgrund der herkömmliche Fourieranalytik übersteigenden Komplexität des vor kurzem noch rein mathematischen Forschungsfeldes "**Multi-Skalen-Analyse**" mit Wavelets, dessen teils als Tagungsbände erschienene "Klassiker" von Daubechies (1992) über Meyer (1992) bis Chui (1992) als "etwas diffizil" gelten, werden das theoretische Gebäude in der vorliegenden Arbeit auf ein für den Praktiker tragendes Fundament gestellt, wie es sich auch in jüngst erschienenen Publikationen (Louis 1994, Newland 1994) durchzusetzen scheint und der verbleibende Abstraktionsgrad weitestgehend durch Computergraphiken des Autors veranschaulicht.

Die Multi-Skalen-Analyse eines Datensatzes anhand zeitbegrenzter "Wavelets" verzichtet auf fouriertypische Fensterfunktionen etwa des bekannten Gaborfilters und erlaubt im Gegensatz zu trigonometrischen Entwicklungen die lokalisierte Auswertung der Signalfrequenzen in einem der FFT überlegenen Algorithmus.

Aufgrund ihrer zeitdiskreten Eigenschaften stellt sie ein herausragendes Kompressionsverfahren zur

Gewinnung von Merkmalsvektoren mehrdimensionaler Datensätze dar, welche im zweiten Abschnitt über die Entscheidungsfunktion eines fuzzy-geregelten Neuronalen Netzes klassifiziert werden sollen.

Die in der Literatur zitierten Wavelet-Anwendungen reichen von Bildkompression, Differentialgleichungen, schlecht konditionierten Matrizenproblemen, EKG-Interpretation, Bilddatenbanken¹, Funktionsapproximation und Geophysik über Spracherkennung, Qualitätskontrolle, Quantenmechanik, Texturanalyse, Turbulenzsimulation, Fraktalmodellierung und Radioastronomie bis zu numerischen Operatoren (cf. z.B. Ruskai 1992), wohingegen Neuronale Netze und Fuzzy-Logik bereits seit längerem als etablierte "Arbeitspferde" einer Reihe technischer Anwendungen aus den Bereichen "Optical Character Recognition", künstliche Intelligenz, Statistik (Hauptachsentransformation), lineare Optimierung, sowie Prozess- und Regeltechnik bekannt sind (cf. Rojas 1994).

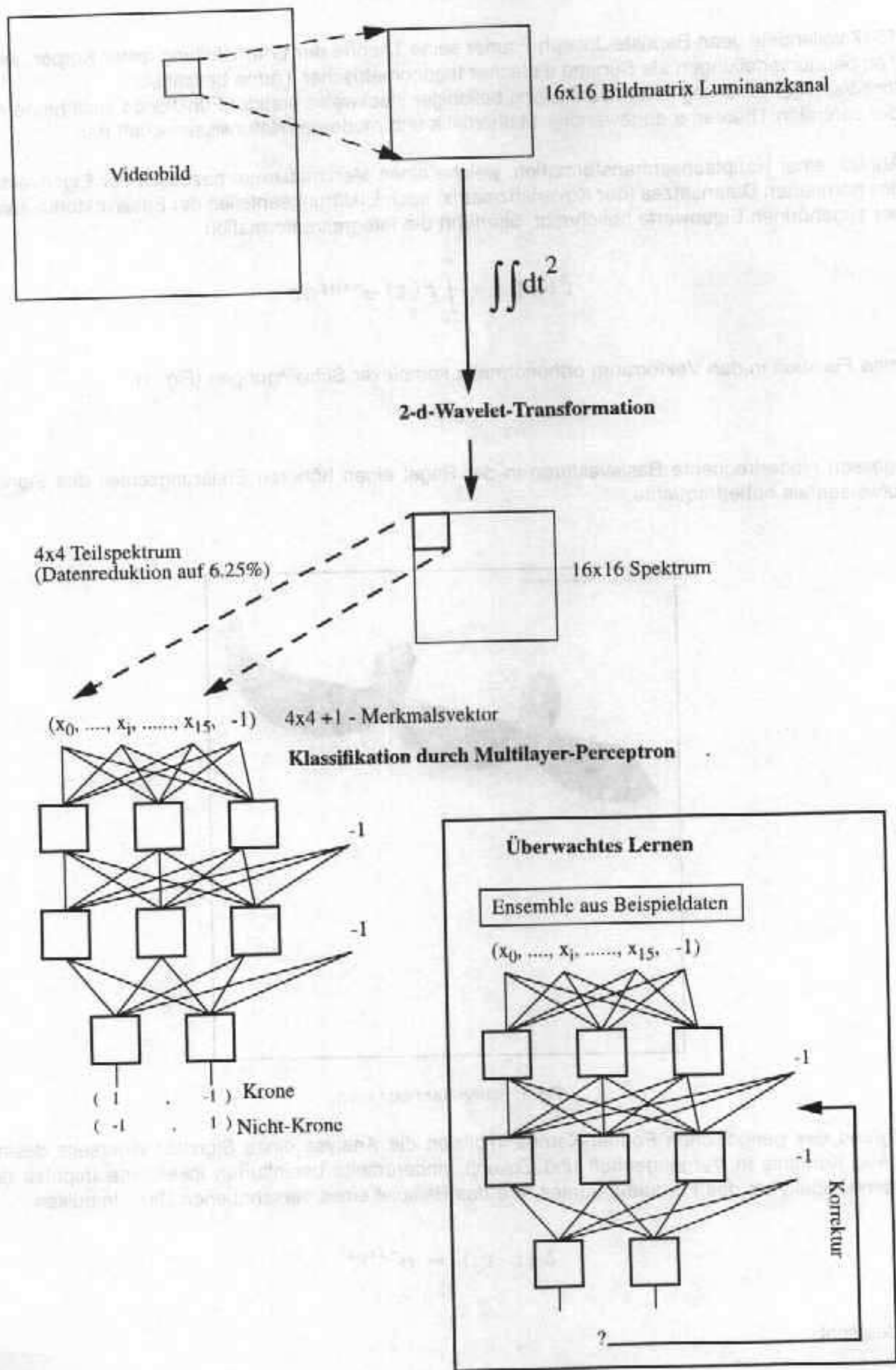
Die dargelegten Methoden sind Module des vom Autor im Rahmen seiner Tätigkeit an der Bayerischen Landesanstalt für Wald und Forstwirtschaft in C++ unter X11R5 und OSF/Motif1.2 entwickelten Softwarepaketes "sphinX" für Digitale Signal- und Bildverarbeitung, numerische Mathematik, 3D-Computergraphik, Video-Overlay und Mustererkennung auf Hewlett-Packard-Workstations Serie 9000/7xx.

X11, X-Toolkit-Intrinsics und OSF/Motif entsprechen weltweiten, umfangreichen Workstation-Standards für die Erstellung plattformunabhängiger Software und interaktiver graphischer Benutzeroberflächen.

Alle 3-dimensionalen Hidden-Surface-, Scan-Line-Polygon-Filling- und Beleuchtungsalgorithmen des vorliegenden "Reference-Manuals" wurden mit "sphinX"-Modulen realisiert und für Einbindung in Textverarbeitung unter Encapsulated Postscript als Rasterbilder codiert; die Texterstellung erfolgte mit WordPerfect5.1 und Framemaker4.0 (Fig. 40).

Das Fehlen noch nicht implementierter Koordinatenachsen möge nachgesehen werden. Wertebereiche und räumliche Lage der Abbildungen sind jedoch in allen Fällen entweder aus dem Text heraus unmittelbar einsichtig, von untergeordneter Bedeutung für den Sinnzusammenhang oder beliebig skaliert zu denken.

¹ Das Fingerabdruckregister des FBI beispielsweise ist wavelet-komprimiert.

Schema

Von Fourier zu Wavelets

1807 vollendete Jean-Baptiste-Joseph Fourier seine Theorie der Wärmeleitung fester Körper, welche Temperaturverteilungen als Summe einfacher trigonometrischer Terme beschrieb. Ihre Verallgemeinerung in der Darstellung beliebiger stückweise stetiger Funktionen stellt heute eines der zentralen Theoreme angewandter Mathematik und moderner Naturwissenschaft dar.

Ähnlich einer Hauptachsentransformation, welche einen Merkmalsraum bezüglich der Eigenvektoren des normierten Datensatzes (der Kovarianzmatrix) nach Erklärungsanteilen der Basisvektoren anhand der zugehörigen Eigenwerte beschreibt, überführt die Integraltransformation

$$\hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

eine Funktion in den Vektorraum orthonormaler komplexer Schwingungen (Fig. 1).

$$e^{-i\omega t}$$

, dessen niederfrequente Basisvektoren in der Regel einen höheren Erklärungsanteil des Signales aufweisen als höherfrequente.

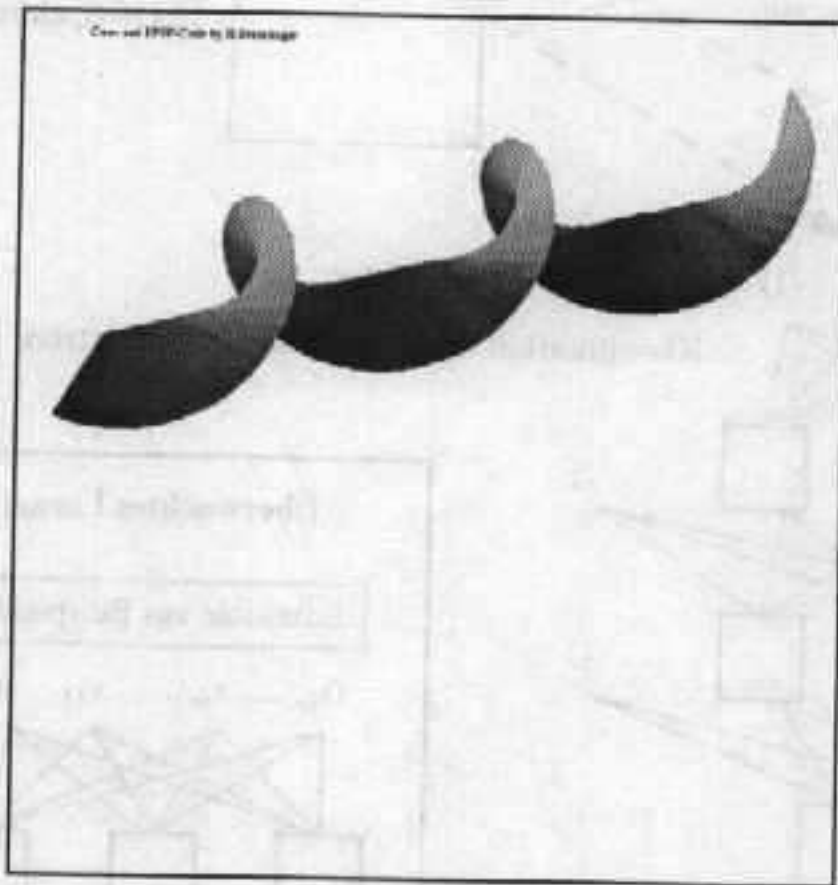


Fig. 1: Fourier-Kern $\exp(-i\omega t)$

Aufgrund des periodischen Fourier-Kernes impliziert die Analyse eines Signales einerseits dessen genaue Kenntnis in Vergangenheit und Zukunft, andererseits beeinflussen lokalisierte Impulse das gesamte Spektrum des Frequenzraumes, wie das Beispiel eines verschobenen Dirac-Impulses

$$\delta(t-t_0) \leftrightarrow e^{-it_0\omega}$$

verdeutlicht.

Die Textur eines Bildausschnittes stellt eine solch kurzzeitige² Signaleigenschaft dar. Da ein Bildausschnitt darüber hinaus der Multiplikation des 2 dimensional Signales mit einem Rechteckimpuls

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & ; |t| \leq \frac{t}{2} \\ 0 & ; |t| > \frac{t}{2} \end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin(\omega \frac{t}{2})}{\omega \frac{t}{2}} =: \text{SINC}(\omega \frac{t}{2})$$

und somit einblendenden Faltung des Signalspektrums mit einer SINC-Funktion (Fig. 2) entspricht, unterliegen texturelle Merkmale gerade bei kleinen Fensterfunktionen in der Praxis starken Verfälschungen.

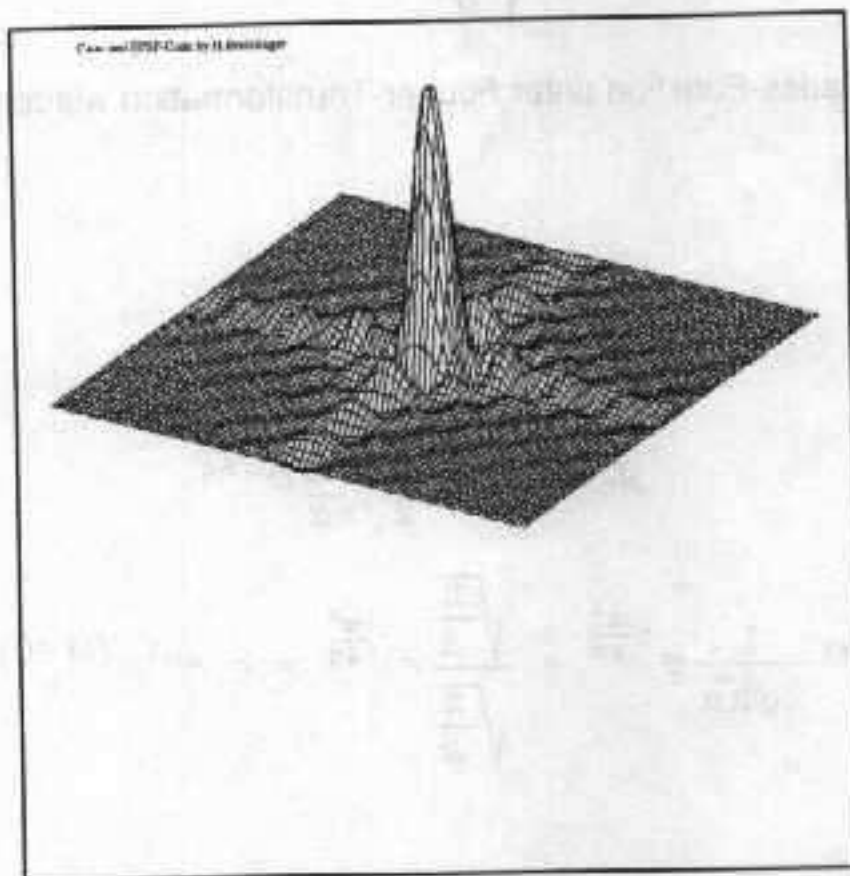


Fig. 2: 2-dimensionale SINC-Funktion

D. Gabor schlug daher bereits 1946 als Fensterfunktion

$$g(t-b)$$

eine Gauss-Glocke

$$e^{-ax^2}$$

mit der Eigenschaft

² Aus historischen Gründen wird die unabhängige Variable als Zeit interpretiert.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx \quad (y := -i\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + xy} dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x - \frac{y}{2a}\right)^2 + \frac{y^2}{4a}} dx =$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{y^2}{4a}} \quad (y = -i\omega)$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

vor, aufgrund derer eine Gauss-Funktion unter Fourier-Transformation wieder in eine Gauss-Funktion abgebildet wird.

Mit

$$a := \frac{1}{4\alpha}$$

$$g_{\alpha}(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} dx = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}{\sqrt{\frac{\pi}{a}}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} = e^{-a\omega^2} \quad (\omega=0) \quad 1$$

zerlegt die Gabor-Transformation

$$(\mathcal{G}_b^{\alpha} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_{\alpha}(t-b) dt$$

die Fouriertransformierte eines Signales in ihre zeitlich lokalen Komponenten durch Ortsraummultiplikation mit einem um b verschobenen Gauss-Fenster.

Definiert man als Fenstergröße

$$\Delta_{g_{\alpha}} := \frac{1}{\|g_{\alpha}\|_2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_{\alpha}^2(x) dx}$$

im Sinne der Standardabweichung,

ergibt sich ausgehend von

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} e^{-ax^2} dx \quad (\omega=0) \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \left| \frac{df}{da} \right| \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{3}{2}} = 4\pi\alpha \int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_{\alpha}^2(x) dx \quad \left| a = \frac{1}{2\alpha} \right| \rightarrow$$

$$\|g_{\alpha}\|_2 = (8\pi\alpha)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow$$

$$\Delta_{g_{\alpha}} = (8\pi\alpha)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha} \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\alpha)^{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\alpha}$$

für die Weite der Gauss-Funktion.

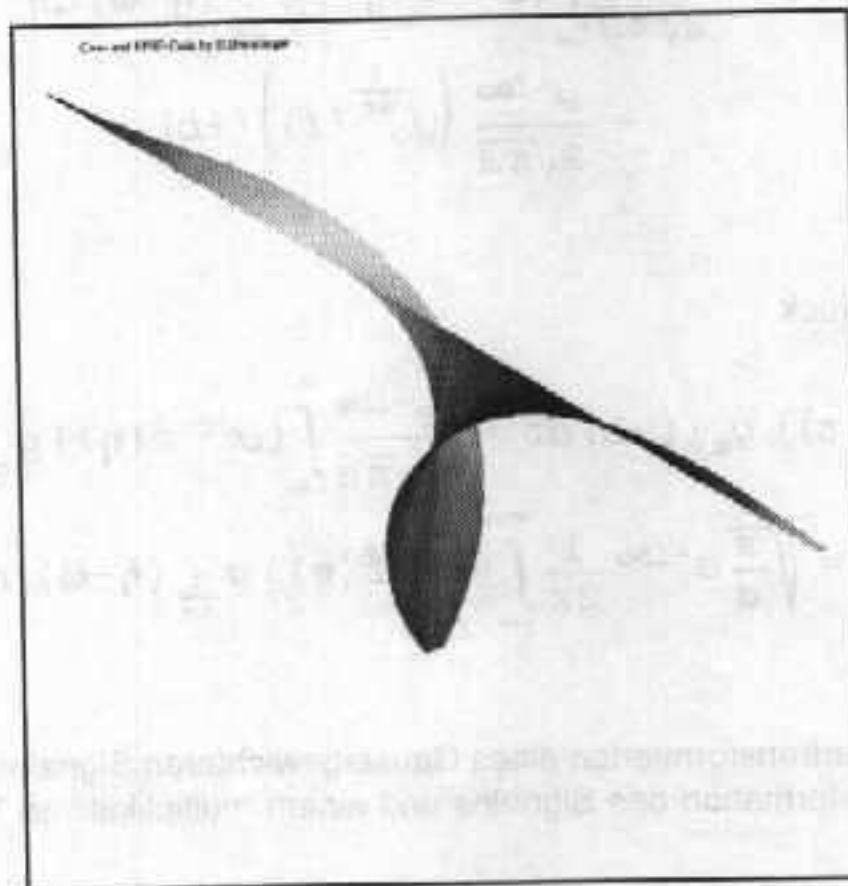


Fig. 3: Gabor-Kern

Die Interpretation der Gabortransformation als Integraltransformation des Signales mit einer Gauss-gewichteten komplexen Schwingung (Fig. 3)

$$G_{b,\omega}^{\alpha}(t) = e^{i\omega t} g_{\alpha}(t-b)$$

führt zu

$$(\mathcal{G}_b^\alpha f)(\omega) = \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{G_{b,\omega}^\alpha(t)} dt$$

Über die Parseval-Identität der Integrale des Gabor-Kernes und seiner Fouriertransformierten erhält man aufgrund der Verschiebungstheoreme

$$G_{b,\omega}^\alpha(t) = e^{i\omega t} g_\alpha(t-b) \rightarrow \hat{G}_{b,\omega}^\alpha(\eta) = e^{-ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2}$$

für die Gabortransformation

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}_b^\alpha f)(\omega) &= \langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{G}_{b,\omega}^\alpha \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\eta) e^{ib(\eta-\omega)} e^{-\alpha(\eta-\omega)^2} d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{\frac{1}{4\alpha}}(\eta-\omega) d\eta \\ &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \left(\mathcal{F}_\omega^{\frac{1}{4\alpha}}(\hat{f}) \right)(-b) \end{aligned}$$

Hierbei belegt der Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) g_\alpha(t-b) dt &= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{\frac{1}{4\alpha}}(\eta-\omega) d\eta \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-ib\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{ib\eta} \hat{f}(\eta)) g_{\frac{1}{4\alpha}}(\eta-\omega) d\eta \end{aligned}$$

die Äquivalenz der Fouriertransformierten eines Gauss-gewichteten Signales mit der Gauss-gewichteten inversen Fouriertransformation des Signales und einem multiplikativen Term gemäß der Ähnlichkeitstheoreme.

Definiert man mittels Parseval-Identität die Fensterfunktion des Frequenzraumes

$$H_{b,\omega}^\alpha(\eta) := \frac{1}{2\pi} \hat{G}_{b,\omega}^\alpha(\eta) = \frac{e^{ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-ib\eta} g_{\frac{1}{4\alpha}}(\eta-\omega)$$

, verdichtet sich der Zusammenhang zwischen Orts- und Wellenraum auf

$$\langle f, G_{b,\omega}^\alpha \rangle = \langle \hat{f}, H_{b,\omega}^\alpha \rangle$$

Das Produkt der Fensterweiten beider Räume stellt sich als

$$2\Delta g_{\alpha} \ 2\Delta g_{\frac{1}{4\alpha}} = 2\sqrt{\alpha} \ 2\frac{1}{\sqrt{4\alpha}} = 2$$

bzw.

$$2\Delta g_{b,\omega}^a \ 2\Delta g_{b,\omega}^a = 2\Delta g_{\alpha} \ 2\Delta g_{\frac{1}{4\alpha}} = 2$$

dar und bezeichnet in der Darstellung als Cartesisches Produkt (Weite mal Höhe)

$$[b-\sqrt{\alpha}, b+\sqrt{\alpha}] \times \left[\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \right]$$

das **Zeit-Frequenz-Fenster**, dessen frequenzinvariante Weite als entscheidender Nachteil der **Gaborttransformation für Signalanalysen** gilt.

Verallgemeinert man die Gaborttransformation für jede Fensterfunktion mit der Eigenschaft

$$\varpi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

zu einer sogenannten *Short-Time-Fourier-Transformation (STFT)*

$$(\tilde{G}_b f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\omega t} f(t)) \overline{\varpi(t-b)} dt$$

und setzt über die Verschiebungstheoreme

$$W_{b,\varpi}(t) := e^{i\omega t} \varpi(t-b)$$

erhält man

$$(\tilde{G}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\varpi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{W_{b,\varpi}(t)} dt$$

und somit ein Zeitfenster

$$[x^* + b - \Delta_{\omega}, x^* + b + \Delta_{\omega}]$$

, in welchem

$$x^* := \frac{1}{\|\varpi\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} t |\varpi(t)|^2 dt$$

und

$$\Delta_{\omega} := \frac{1}{\|\varpi\|_2} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (t-x^*)^2 |\varpi(t)|^2 dt}$$

. Gilt nun für die Fouriertransformierte der Fensterfunktion ebenfalls

$$t\varpi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

ergibt sich mittels

$$\begin{aligned} V_{b,\varpi}(\eta) &:= \frac{1}{2\pi} \hat{W}_{b,\varpi}(\eta) \\ &= \left(\frac{e^{ib\omega}}{2\pi} \right) e^{-ib\eta} \hat{\varpi}(\eta - \omega) \end{aligned}$$

über die Parseval-Identität korrespondierender Integrale in Orts- und Frequenzraum

$$(\tilde{G}_b f)(\omega) = \langle f, W_{b,\omega} \rangle = \langle \hat{f}, V_{b,\omega} \rangle$$

Analog der Herleitung für den Ortsraum stellen sich das Frequenz- und Zeit-Frequenz-Fenster dar als

$$[\omega^* + \omega - \Delta_{\omega}, \omega^* + \omega + \Delta_{\omega}]$$

, bzw.

$$[x^* + b - \Delta_{\omega}, x^* + b + \Delta_{\omega}] \times [\omega^* + \omega - \Delta_{\omega}, \omega^* + \omega + \Delta_{\omega}]$$

, dessen Fläche mit

$$4\Delta_{\omega}\Delta_{\omega}$$

wiederum frequenzinvariant ist.

Die Gabortransformation bildet hierbei diejenige Short-Time-Fourier-Transformation mit dem kleinsten Cartesischen Produkt.

Frequenzreziproke Wichtungsfunktionen des Ortsraumes sind wegen der Raum-Zeit-Charakteristik von Merkmalen eines Signales jedoch Voraussetzung für einen Klassifikator im Zuge der Mustererkennung und für Fenster

$$\psi(x)$$

, welche nach Chui (1992) die notwendige Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$$

erfüllen müssen, nennt man eine Integraltransformation mit Lokalisierungseigenschaft des Ortsraumes
Integrale Wavelettransformation (IWT)

$$(W_{\psi} f)(b, a) = |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad \begin{array}{l} a, b \in \mathbb{R} \quad a \neq 0 \\ f \in L^2 \end{array}$$

Gilt für die Norm der Fouriertransformierten ihres Kernes

$$C_{\psi} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

als auch

$$t\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

sowie

$$t\hat{\psi}(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

muß die Fouriertransformierte aufgrund der Reziprozität von Orts- und Frequenzraum kontinuierlich sein und

$$C_{\psi} < \infty$$

impliziert wegen der Mittelwerteigenschaft von

$$\hat{\psi}(0)$$

die geforderte Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

, auf welche die Bezeichnung Wavelet ("Wellchen" im Sinne eines Wellenzuges mit begrenztem Support)³ zurückzuführen ist.

Mittels

³ Deutsche Übersetzung nicht bekannt

$$\psi_{b,a}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

kann man die Transformation auch als Inneres Produkt

$$(W_\psi f)(b,a) = (f, \psi_{b,a})$$

schreiben, dessen Wavelet-Kern mit Zentrum und Radius

$$t^*, \text{ bzw. } \Delta_\psi$$

die Information innerhalb eines über den Parameter a skalierbaren Zeit-Fensters

$$[b+at^*-a\Delta_\psi, b+at^++a\Delta_\psi]$$

codiert.

Da man aufgrund des Ähnlichkeitssatzes für den Wellenraum

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \hat{\psi}_{b,a}(\omega) &= \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega) \end{aligned}$$

erhält und die Substitution

$$\eta(\omega) := \hat{\psi}(\omega + \omega^*)$$

mit

$$\omega^* \text{ und } \Delta_\psi \text{ analog } t^* \text{ und } \Delta_\psi$$

über Parseval-Identität und Verschiebungstheoreme zu

$$(W_\psi f)(b,a) = \frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta(a(\omega - \omega^*/a))} d\omega$$

führt, bewirkt die Wavelettransformation abgesehen von einem Skalar

$$\frac{a|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}$$

und einem Phasenfaktor

$$e^{ib\omega}$$

wegen

$$\eta(a(\omega - \omega^*/a)) = \eta(a\omega - \omega^*) = \psi(a\omega)$$

ebenfalls eine **Lokalisierung innerhalb eines Frequenzfensters**

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta\omega, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta\omega \right]$$

, wobei das Verhältnis

$$\frac{\text{Mittenfrequenz}}{\text{Bandbreite}} = \frac{\frac{\omega^*}{a}}{\frac{2\Delta\omega}{a}} = \frac{\omega^*}{2\Delta\omega}$$

konstant ist und sich das kombinierte Zeit-Frequenzfenster

$$[b + at^* - a\Delta t, b + at^* + a\Delta t] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{a} \Delta\omega, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{a} \Delta\omega \right]$$

somit über a umgekehrt proportional der untersuchten Frequenz weitet.

Während somit Zeitpunkt, bzw. Ort einer Signaländerung nach Fourier-Integration, welche lediglich eine Mittelwertinformation über die gesamte Signaldauer liefert, verloren sind, bleiben unter der Wavelettransformation charakteristische Frequenzen distinkter Ortsraumabschnitte erhalten.

Wavelet-Transformation

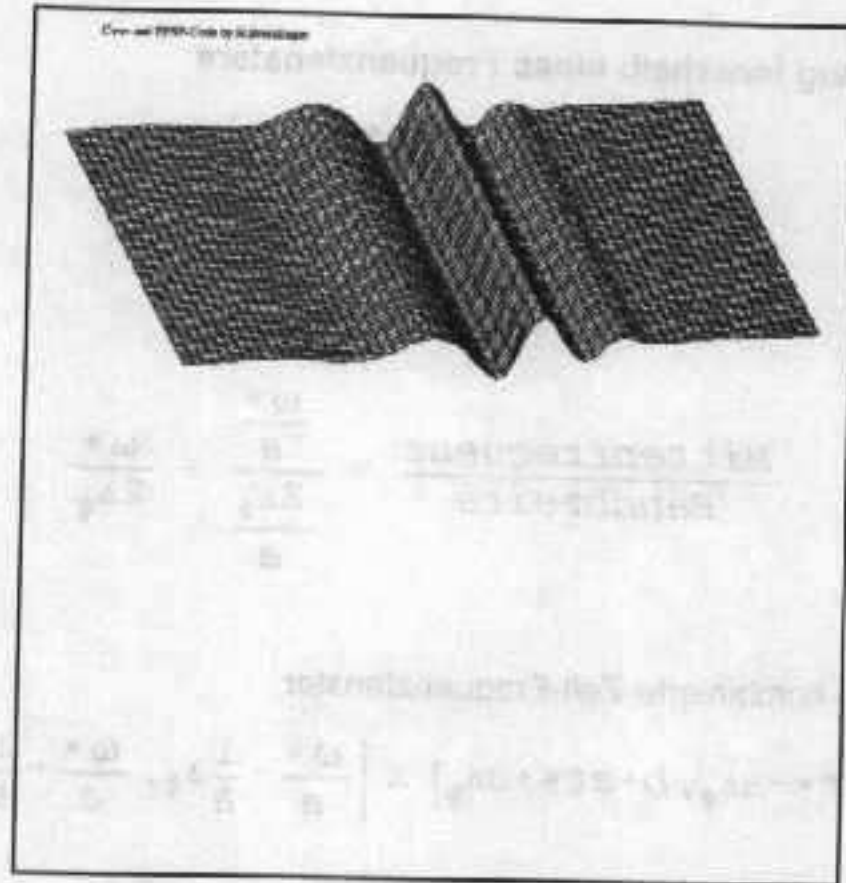


Fig. 4: D12-Wavelet $W(8x-4)$

Wie dargelegt ist ein orthonormales Funktionensystem zu konstruieren, dessen innere Produkte mit einem Vektor Frequenzanteilen desselben innerhalb lokalisierbarer Abschnitte entsprechen.

Im Gegensatz zur Fourieranalyse, deren Amplitudenspektrum trigonometrisch gewichteter Mittelwerte lediglich pauschale Aussagen über einen Datensatz ohne Differenzierung der inneren Struktur im Sinne einer merkmalsbildenden zeitlichen Abfolge erlaubt, erhält die Wavelettransformation eben jene mustertypische Gesetzmäßigkeit der Frequenzfolge durch Abbildung in einen orthonormalen Vektorraum nicht-periodischer Schwingungszüge, sogenannter "Wavelets", deren Eigenschaften im folgenden dargelegt werden.

Einem jungen, bis dato nahezu rein mathematischen Forschungsgebiet der letzten Jahre entsprechend, wurde die Literatur des englischen Sprachraumes weit überwiegend von Mathematikern für Mathematiker (Daubechies 1993, Chui 1992, Meyer 1992, 1993) verfaßt und erschließt sich nach Einschätzung des Autors "nicht immer unmittelbar", weswegen die folgende Einführung den eher pragmatischen Weg des Ingenieurs unter Angabe aller Zwischenschritte praxisrelevanter Zusammenhänge beschreitet und letztere über Computergraphiken weitgehend zu veranschaulichen sucht.

Letztere stellen gegenüber dem Textteil bereits die 2-dimensionalen Verhältnisse der Bildverarbeitung dar.

Einen Vektorraum orthonormaler Wavelets spannen rekursiv gefaltete Gleichungen auf, welche in der

amerikanischen Literatur (Newland 1994) als "**dilation equations**" ⁴bezeichnet werden.

Ausgehend von einer meist einfachen Urfunktion, wie z.B.

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; \text{else} \end{cases}$$

erhält man über wiederholte Faltung mit einem Vektor sogenannter **Waveletkoeffizienten**

$$[c_0, c_1, \dots, c_n]$$

eine **Skalierungsfunktion**⁵ (cf. Fig. 34-39)

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$$

und hiervon durch alternierenden Vorzeichenwechsel des gedrehten Faltungskernes abgeleitet das korrespondierende **Mother-Wavelet**

$$W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x+k-n+1)$$

Urfunktion und Waveletkoeffizienten, deren Randbedingungen unten gezeigt werden, definieren ein orthonormales Funktionensystem, dessen Skalierungsfunktion und von $W(x)$ gemäß

$$W(2^j x - k)$$

gewonnene Wavelets (Fig. 4,5,6 für verschiedene Koeffizienten) über alle Faltungsrekursionen bei abnehmender Zahl der Unstetigkeitsstellen in einem fraktalen Sinne jeweils selbstähnlich sind.

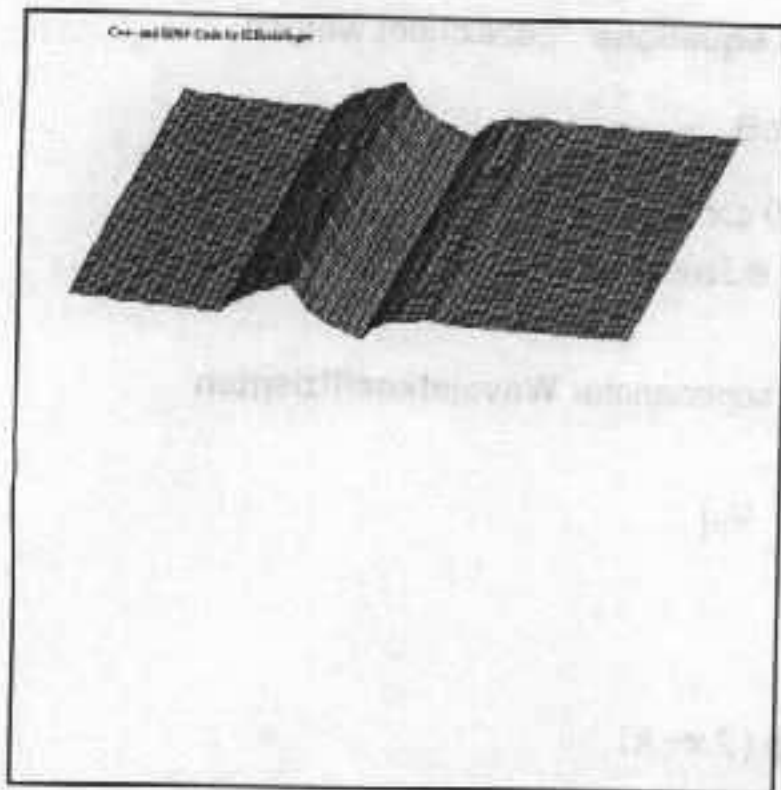
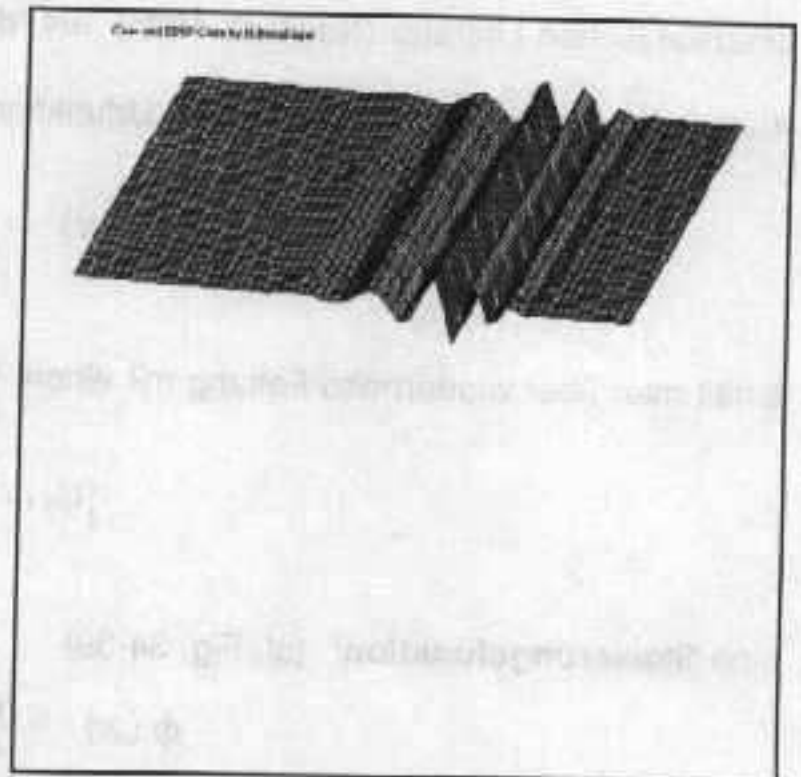
Da sich die Konstruktionsvorschrift eines gleitenden Mittels ($\phi(x)$), bzw. eines Differenzenoperators ($W(x)$) direkt in die zu zeigende Transformation eines Datenvektors abbilden, spricht man wegen der Vereinigung zweier Filter mit Tiefpaß-, bzw. Hochpaßcharakteristik auch von einem **quadrature-mirror-filter**, welcher einen Datensatz in den bezüglich der gewählten Skalierung gemeinsamen Anteil der Komponenten und ihre Unterschiede transformiert.

Konstruiert man einen Vektorraum aus zu- wie ineinander über Skalierung und Ortsraumverschiebung orthogonalen Quadraturfilterpaaren begrenzten Supports⁶, erhält man Basisvektoren, welche verschiedenen Frequenzbereichen des Eingangsvektors an lokalisierten Stellen des Ortsraumes entsprechen.

⁴da dem Autor eine deutsche Übersetzung bislang nicht bekannt wurde, sei der Ausdruck hier als "rekursiv wachsende Gleichung" verstanden

⁵Übersetzung des Autors von: scaling function

⁶Bereich, außerhalb dessen eine Funktion bis auf eine Schwelle ϵ zu Null abfällt

Fig. 5: D4-Wavelet $W(4x-2)$ Fig. 6: D20-Wavelet $W(16x-9)$

Fordert man ferner für den Eingangsvektor eine Länge 2^m , lassen sich die inneren Produkte mit den Basisvektoren aufgrund der rekursiven Definition letzterer rechentechnisch sehr effektiv implementieren, indem jedes der m kaskadierenden Quadraturfilterpaare seinen jeweiligen Eingangsvektor in 2 tief-, bzw. hochpaßgefilterte Vektoren halber Länge transformiert, deren erster in die folgende Filterstufe mit orthogonalem Frequenzbereich via Skalenverdoppelung eingeht.

Die Bildung der inneren Produkte, der eigentlichen Integraltransformationen, reduziert sich hierbei auf eine der Rekursionsstufe des zugrundeliegenden Basisvektors entsprechende Faltung mit dem resultierenden "Tiefpass-Vektor" aller vorhergehenden Filterpaare.

Da ein Wavelet

$$W(2^j x - k) \quad ; j \in \{-1, 0, 1, \dots, m-1\}$$

um 2^j gestaucht und zu den Wavelets $W(2^j x - k + 1)$ und $W(2^j x - k - 1)$ um 2^j verschoben ist, wächst die Wavelet-Zahl mit dem **Level** j in Potenzen von 2.

Das Wavelet-Fenster weitet sich demnach unter der Integraltransformation reziprok dem interessierenden Frequenzbereich und ist über die Translation $k/2^j$ lokalisiert.

Für die angewandte Mathematik sind vor allem die Koeffizientenvektoren D_x (Länge $x=4,6,8,\dots$) bedeutsam, welche nach unten gezeigten Randbedingungen erstmals von Ingrid Daubechies gefunden wurden.

Der rekursiven Bildungsvorschrift gemäß besitzt jedes Wavelet der Koeffizientenvektorlänge L einen Support

$$(L-1) \frac{2^m}{2^j}$$

, welcher mit demjenigen der Nachbar-Wavelets überlappt und an Anfang wie Ende des Datenvektors

nach Art einer Ring-Faltung⁷ geschlossen wird, wodurch der Funktionsverlauf der Rand-Wavelets in Fig. 7-12 erklärt wird.

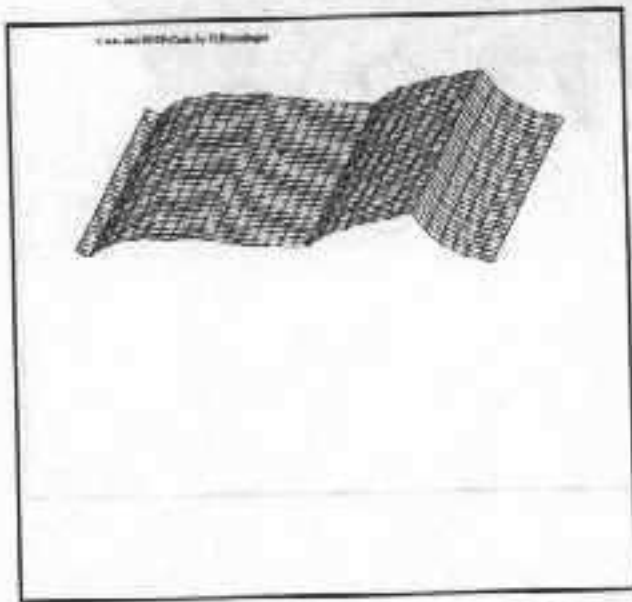


Fig. 7: D4-Wavelet $W(2x-1)$

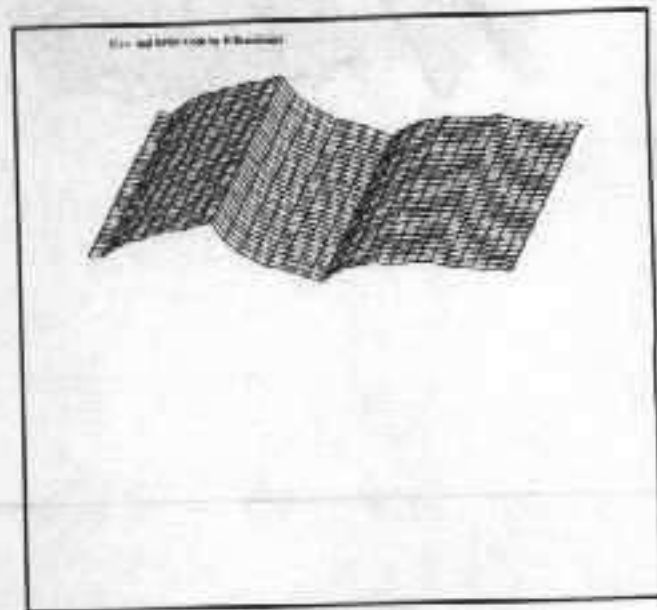


Fig. 8: D4-Wavelet $W(2x)$

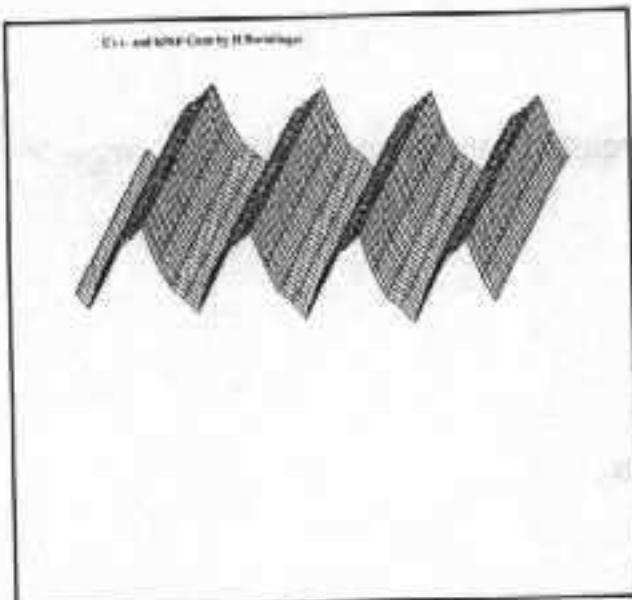


Fig. 9: Überlagerung der D4-Wavelets $W(4x-k)$

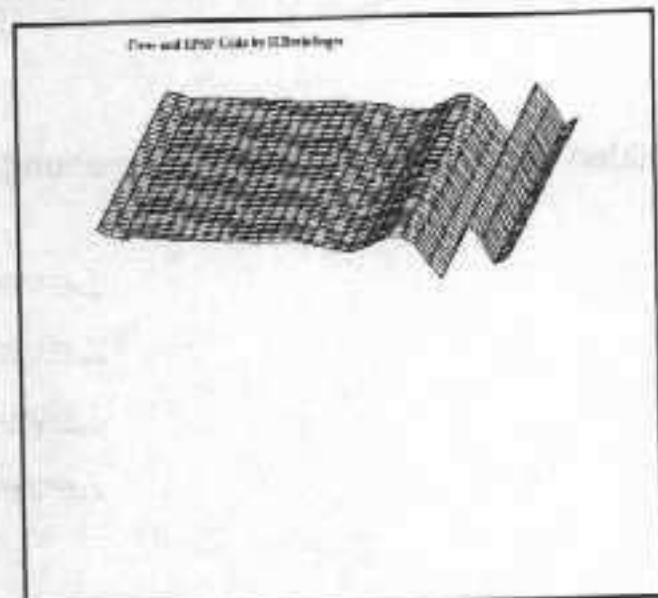
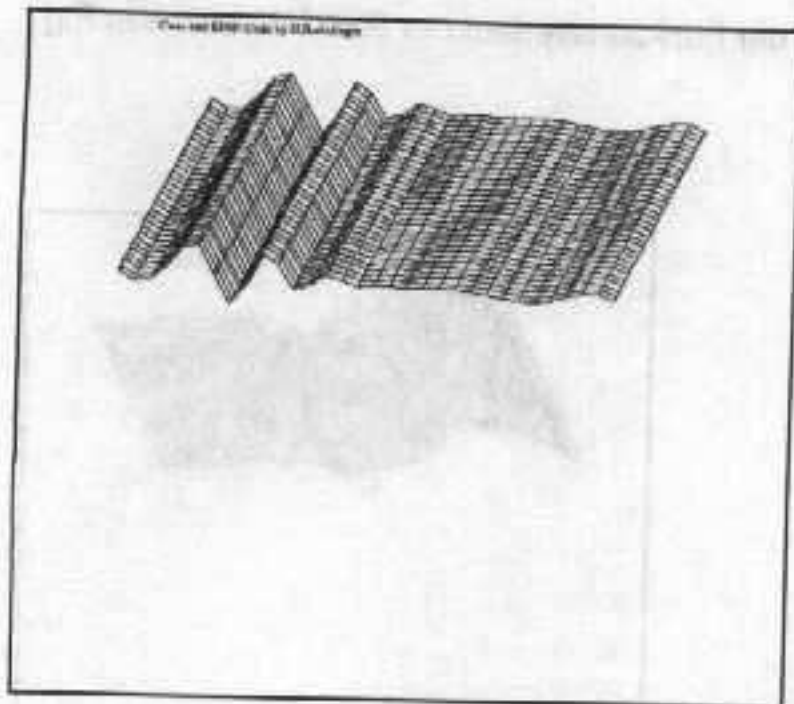
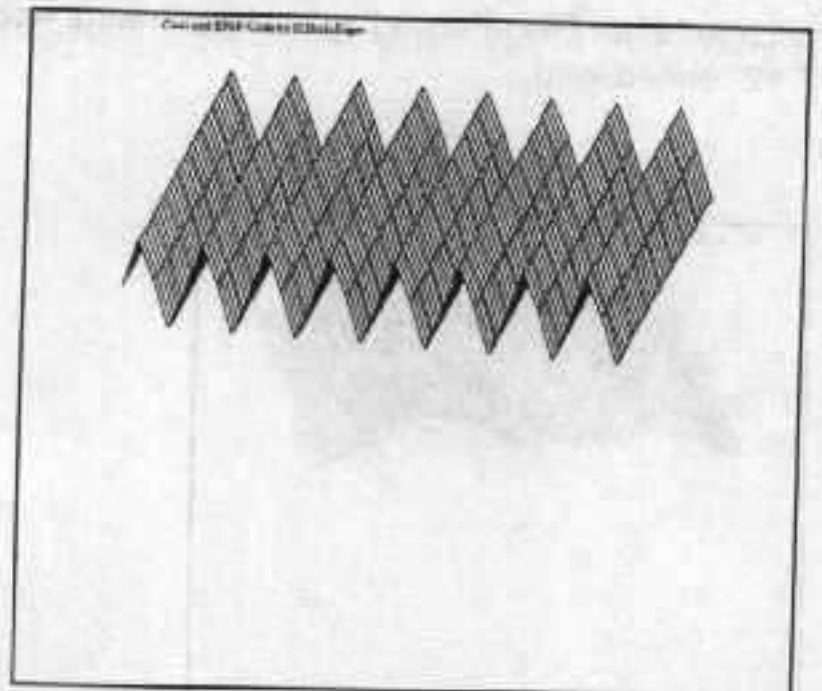


Fig. 10: D12-Wavelet $W(8x-6)$

0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0
0	5	0	5	1	1	0	0

⁷circular convolution: Faltung, welche eine der Funktionen an den Überhangsbereichen Anfang und Ende periodisch fortgesetzt denkt.

Fig. 11: D20-Wavelet $W(8x)$ Fig. 12: Überlagerung der D20-Wavelets $W(8x-k)$

Insbesondere die für signalanalytische Funktionen zunächst ungewöhnlich erscheinende Zahl an Unstetigkeitsstellen, welche für längere Koeffizientenvektoren jedoch abnimmt, ist auffällig.

Die Wavelet-Amplituden eines transformierten Vektors

$$a_{2^j}$$

bilden durch die Ortstraumverschiebung der analysierenden Wavelets Frequenzgruppen der Länge 2^j :

Level	-1	a_0
Level	0	a_1
Level	1	a_2, a_3
Level	2	a_4, a_5, a_6, a_7
...	...	...
Level	$m-1$	$a_{\frac{n}{2}}, \dots, a_{n-1}$

Da eine n -dimensionale Transformation analog der Fourieranalyse durch n orthogonale 1-dimensionale Transformationen berechnet werden kann, ergibt sich etwa für eine 8×8 -Matrix eine Levelverteilung

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Behält man für die Rücktransformation lediglich eine linke obere $k \times k$ Sub-Matrix ($\log_2 k \in \mathbb{N}, k < m$), setzt also die Amplituden aller höheren Level gleich Null, ergibt sich aus dem auf

$$\left(\frac{k}{m}\right)^2 2^m$$

reduzierten Datensatz ein tiefpassgefiltertes Original.

Fig. 13a-17b zeigen die Wavelet-Dekomposition einer 32×32 -Matrix in 75%-Reduktionsschritten und logarithmisch dargestellt die zugehörigen Waveletspektren, deren Matrix-Indices gegenüber dem Fourier-Spektrum nicht nur eine Frequenz, sondern auch deren Ortsraumlokalisierung wiedergeben.

Die Abbildungen der linken Spalte sind jeweils die Rücktransformierten der zugehörigen gefilterten Spektren in der rechten Spalte. Amplituden in gefilterten Bereichen des Spektrums beruhen auf Artefakten während der Graphikerstellung, da der interaktiv gewählte Bildausschnitt jeweils leichten Schwankungen unterworfen war.



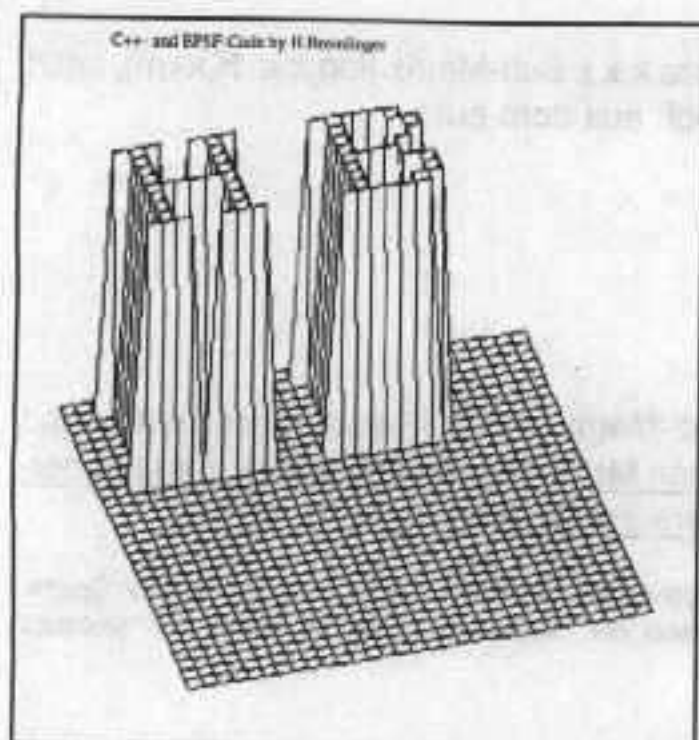


Fig. 13a: 32x32 Datensatz

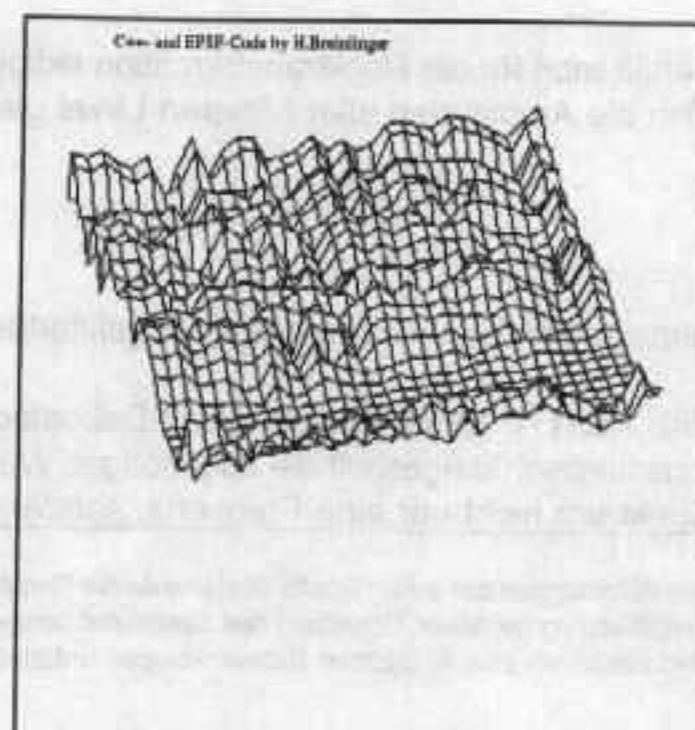


Fig. 13b: Amplitudenspektrum zu 13a

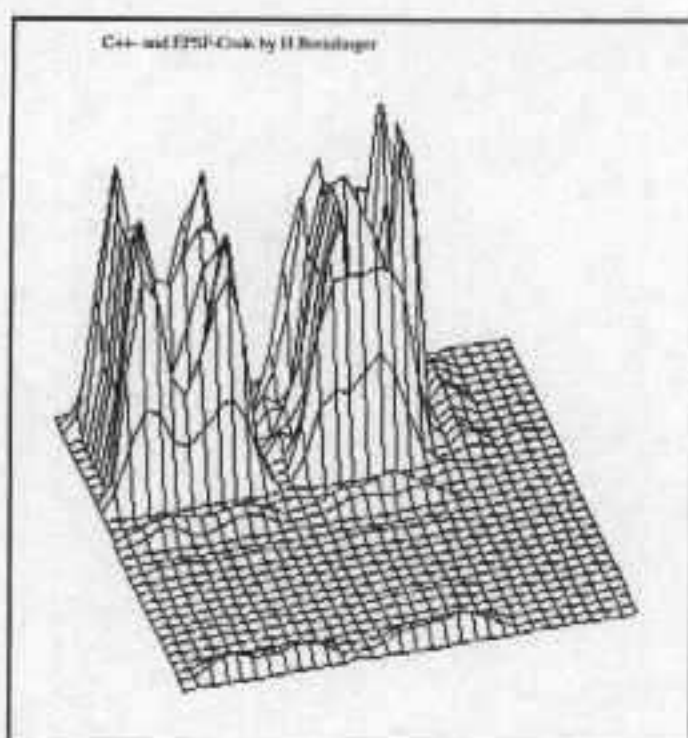


Fig. 14a: Kompression auf 25 %

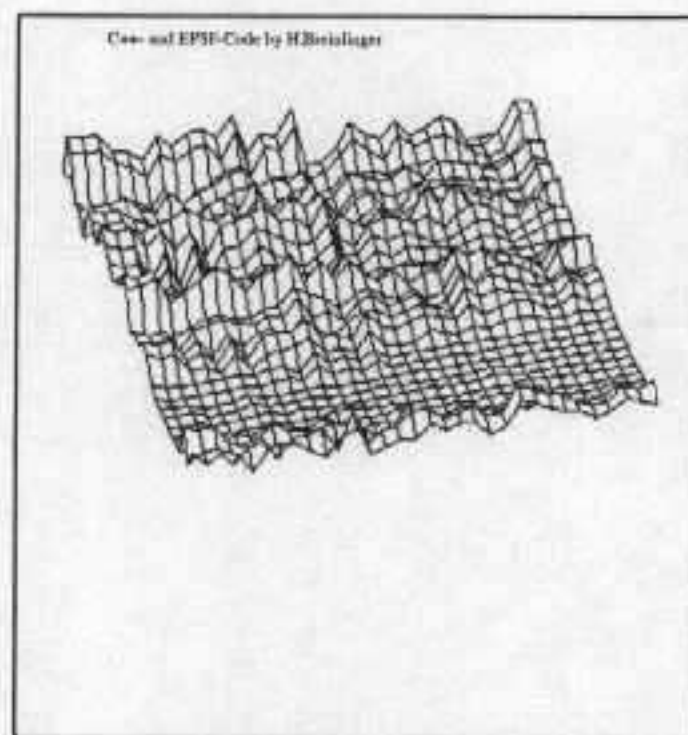


Fig. 14b: 16x16 Rest-Spektrum zu 14a

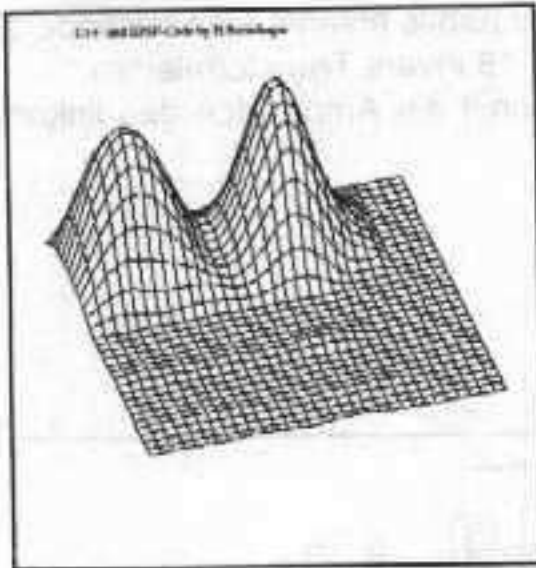


Fig. 15a: Kompression auf 6.25 %

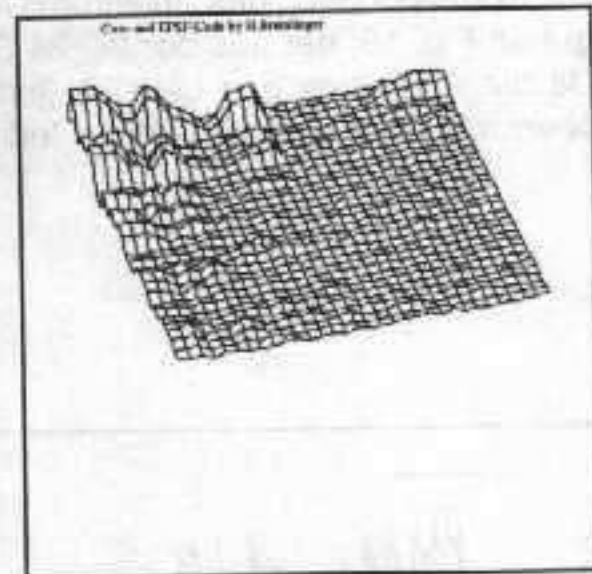


Fig. 15b: 8x8 Rest-Spektrum zu 15a

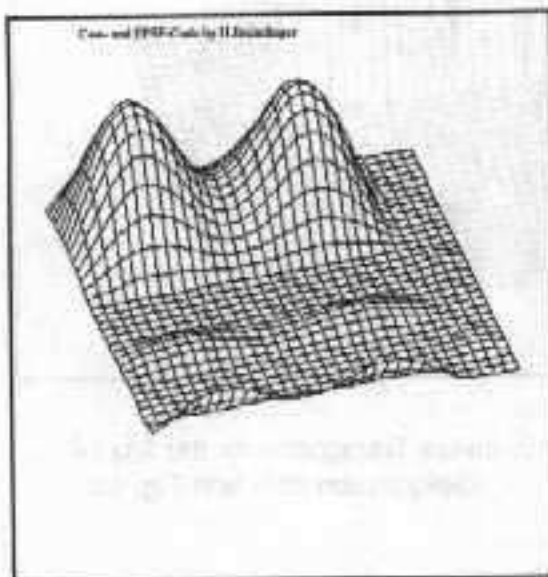


Fig. 16a: Kompression auf 1.5 %

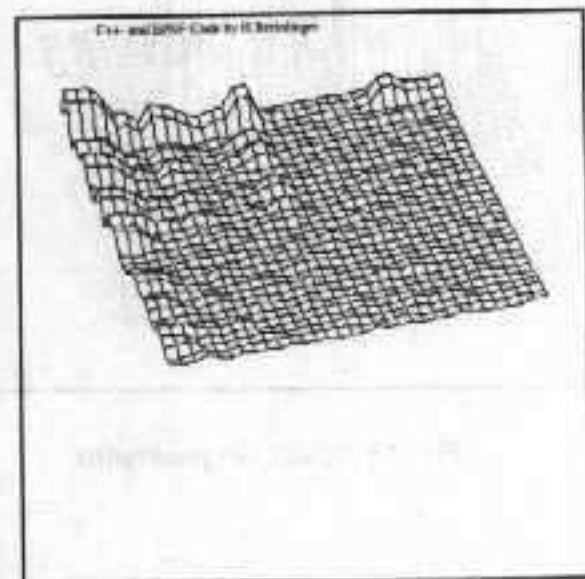


Fig. 16b: 4x4 Rest-Spektrum zu 16a

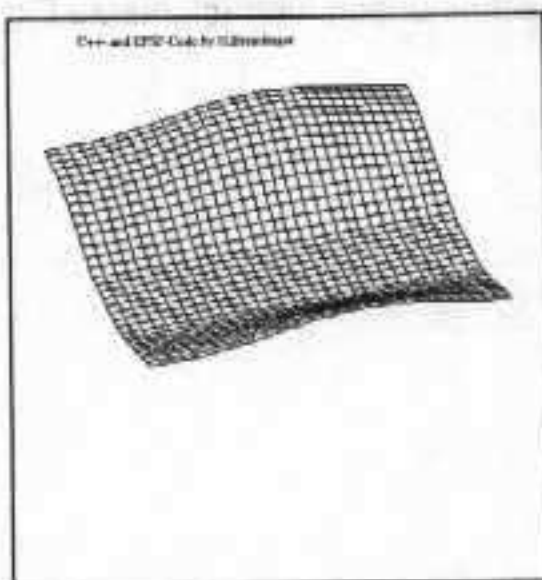


Fig. 17a: Kompression auf 0.4 %

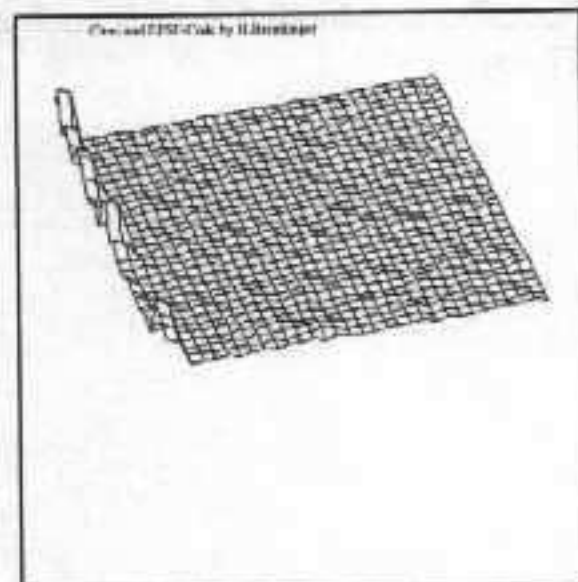


Fig. 17b: 2x2 Rest-Spektrum zu 17a

Die Korrespondenz des Spektrums mit definierten Abschnitten des Ortsraumes erkennt man besonders gut an Fig. 19, der aus der 24x24 Submatrix des Spektrums von Fig. 18 invers Transformierten. Da die Submatrix den Level 4 (Indices 16-31) genau halbiert und somit die Amplituden des linken oberen Bildteiles behält, erfährt lediglich das "B" eine Filterung.

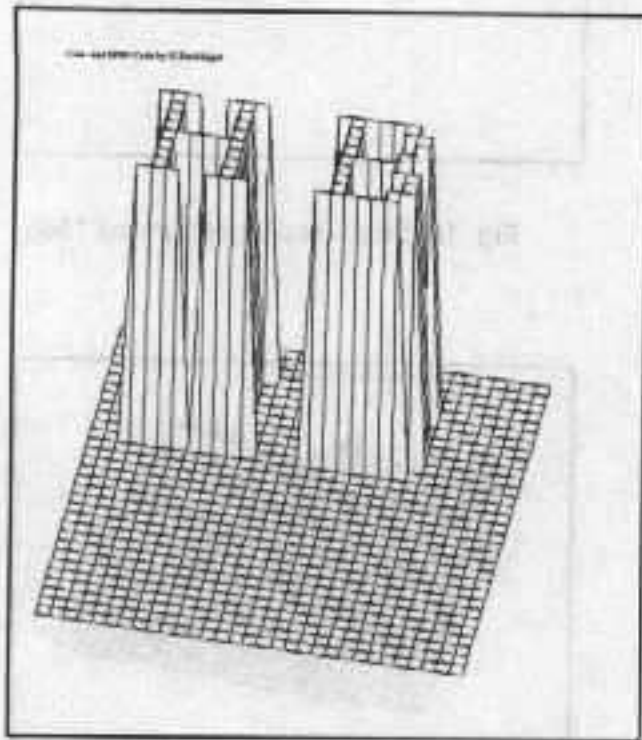


Fig. 18: 32x32 Originalmatrix

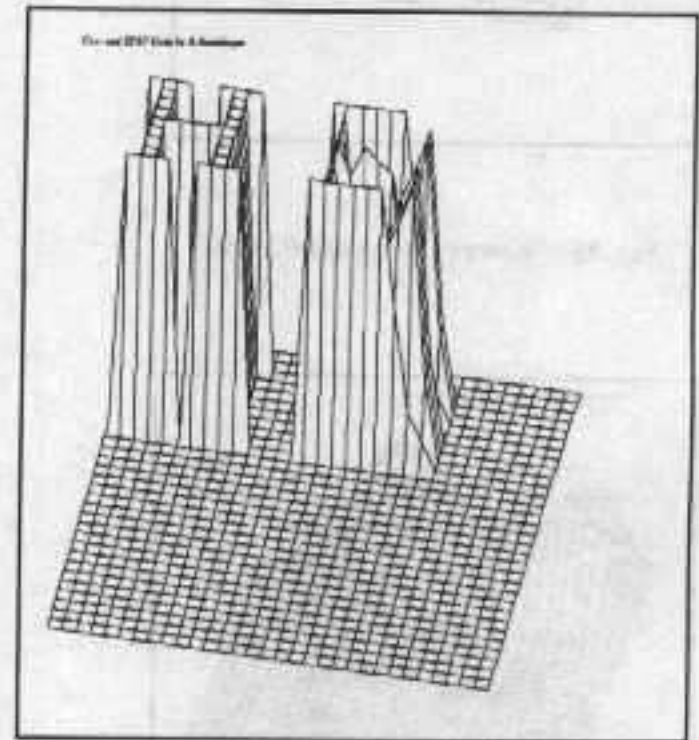


Fig. 19: Invers Transformierte der 24x24 Spektralsubmatrix von Fig. 18

Gegenüber einer eher mittelnden Fourier-Transformation, welche im JPEG⁸-Algorithmus das Kernstück des internationalen Kompressionsstandards für Einzelbilder darstellt, erreicht die Wavelet-Filterung bei besseren Kompressionsraten eine höhere Detailtreue und Kantenschärfe, welche zu sehr hohen Reduktionsstufen hin jedoch auch zu Artefakten und Aufrasterungserscheinungen führt (cf. hierzu Fig. 27-33).

⁸Joint Photographic Experts Group

Fig. 20 zeigt hierzu das Klimameßhäuschen aus Fig. 27 als 128^2 Ausschnitt eines digitalisierten S-VHS-Bildausschnittes in einem 3-dimensionalen Hidden-Surface-Plot des Grünkanal-Grauwertverlaufes. Fig. 21 und Fig. 22 geben dieselbe Datenmatrix nach Kompression auf 25% bzw. 6.25 % der Daten, Fig. 23 ihre Fourierteilsumme mit ebenfalls 6.25 % (Lowpass-Filter) wieder.

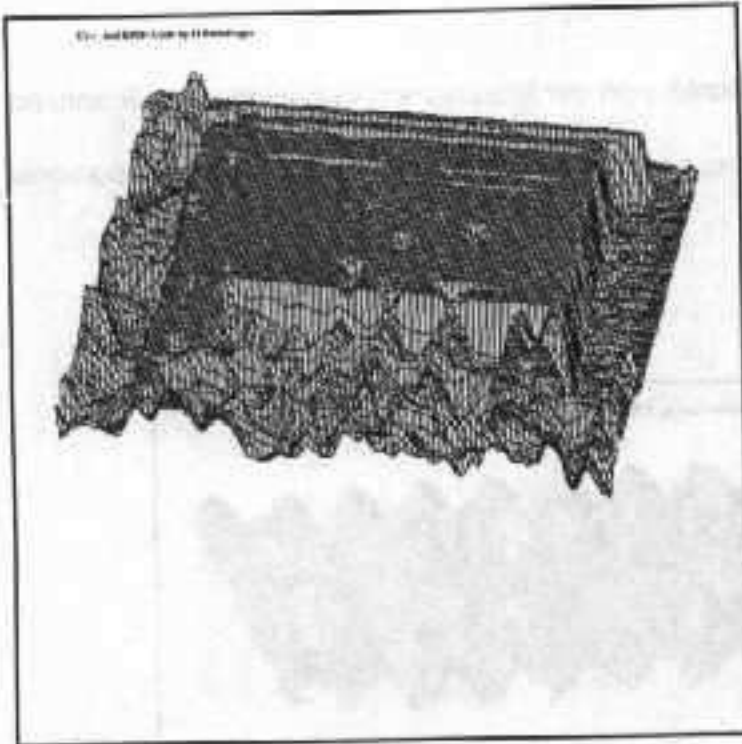


Fig. 20: 128x 128 Grauwertausschnitt S-VHS-Bild
Motiv: Klimameßhäuschen

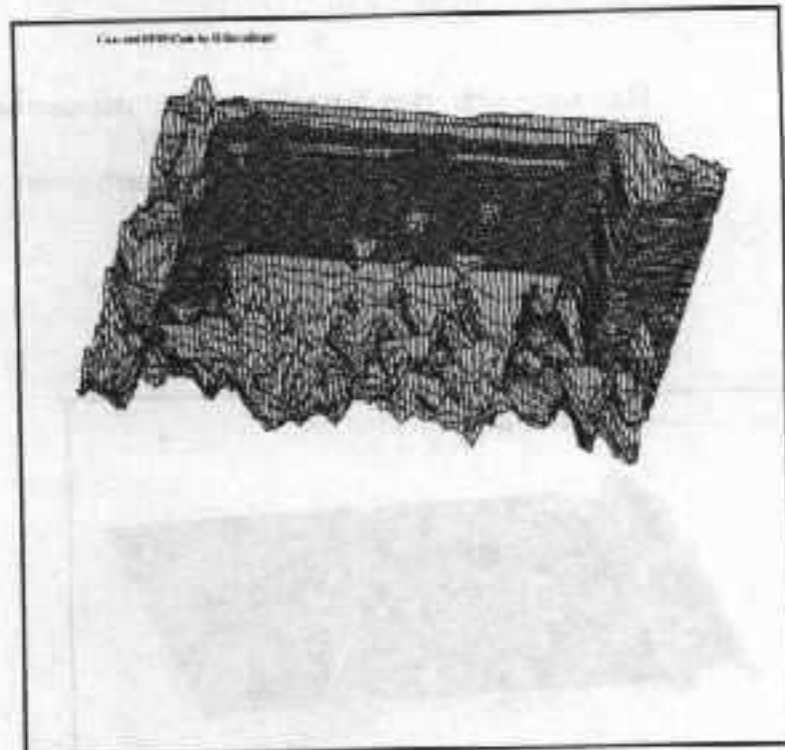


Fig. 21: Datenreduktion auf 25 %
durch Wavelettransformation

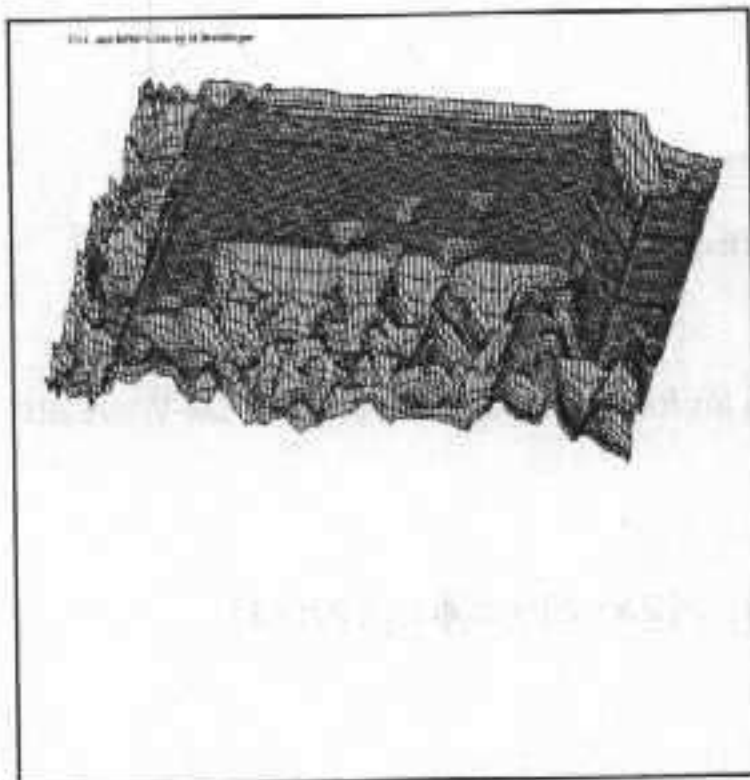


Fig. 22: Datenreduktion auf 6.25 %
durch Wavelettransformation

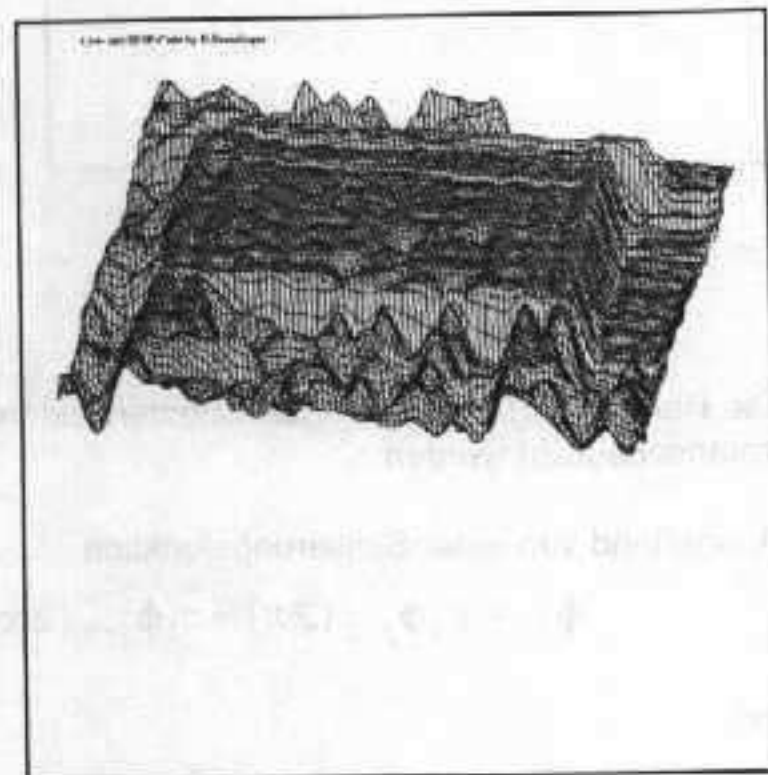


Fig. 23: Datenreduktion auf 6.25 % durch Fourier-
Tiefpass

Die Kanten des Fourier-gefilterten Bildes sind infolge der verminderten Flankensteilheit stark verschmiert, ebene Flächen lassen den "trigonometrischen Aufbau" erkennen.

Hingegen erhält die Wavelettransformation lokale Frequenzcharakteristika in höhere Kompressionsstufen hinein, da ihre Amplituden nicht einem gewichteten Gesamtmittel des Signales entsprechen, sondern Kennwerte von Ortsraum-Fenstern darstellen, deren Weite sich verglichen mit einer Gabor-Transformation der untersuchten Schwingungslänge anpasst und somit für hohe Frequenzen, mithin feine Details, keine einebnende "Übergröße" aufweist.

Man kann sich den Zusammenhang mit den periodischen Funktionen der klassischen Nachrichtentechnik anhand von Fig. 24 und Fig. 25 verdeutlichen.
Ein "Wellchen" (Wavelet) bildet demnach einen Baustein einer periodischen Funktion, dessen Größe proportional der Schwingungslänge ist.

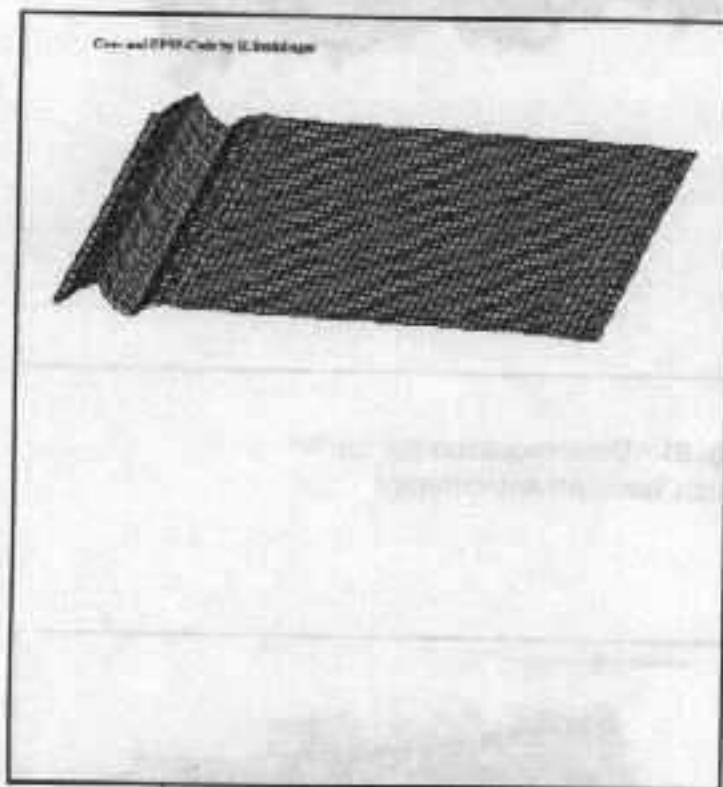


Fig. 24: D4-Wavelet $W(8x-1)$

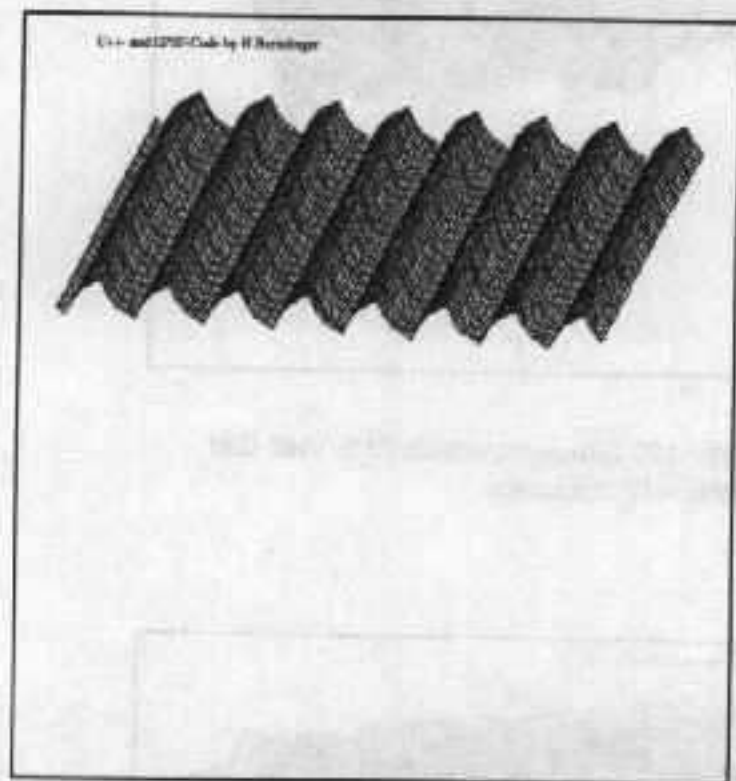


Fig. 25: Überlagerung der D4-Wavelets $W(8x-k)$

Die Randbedingungen der Koeffizientenvektoren $\mathbf{c}$ sollen im folgenden am Beispiel der D4-Wavelets veranschaulicht werden.

Ausgehend von einer Skalierungsfunktion

$$\phi_j = c_0 \phi_{j-1}(2x) + c_1 \phi_{j-1}(2x-1) + c_2 \phi_{j-1}(2x-2) + c_3 \phi_{j-1}(2x-3)$$

mit

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ 0 & ; \text{else} \end{cases}$$

erhält man im zweiten Iterationsschritt

$$[\Phi_2] = \begin{bmatrix} c_0 & & & & \\ c_1 & & & & \\ c_2 & c_0 & & & \\ c_3 & c_1 & & & \\ & c_2 & c_0 & & \\ & c_3 & c_1 & & \\ & & c_2 & c_0 & \\ & & c_3 & c_1 & \\ & & & c_2 & c_0 \\ & & & c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = M_2 M_1 [1]$$

, wobei

$$M_r := \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}_{(2^{r+1}+2^r-2) \times (2^r+2^{r-1}-2)}$$

Der relative Versatz der Matrixelemente korrespondiert mit dem Skalierungsfaktor 2.

Die Zahl der errechneten Punkte der Skalierungsfunktion mit einem Abstand 2^r

$$2^{r+1}+2^r-2$$

ergibt so eine Reihe

$$1, 4, 10, 22, 46, \dots, 2^{r+1}+2^r-2$$

und ein Wavelet

$$W_j(x) = -c_3 \phi_{j-1}(2x) + c_2 \phi_{j-1}(2x-1) - c_1 \phi_{j-1}(2x-2) + c_0 \phi_{j-1}(2x-3)$$

des zweiten Iterationsschrittes läßt sich in Matrixnotation ableiten gemäß

$$[W_2] = \begin{bmatrix} -C_3 & & & \\ 0 & -C_3 & & \\ C_2 & 0 & -C_3 & \\ 0 & C_2 & 0 & -C_3 \\ 0 & -C_1 & 0 & C_2 \\ & C_0 & 0 & -C_1 \\ & & C_0 & 0 \\ & & & C_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} [1]$$

, bzw. aufgrund der Kommutativität der Faltungsoperation auch als

$$[W_2] = \begin{bmatrix} C_0 & & & \\ C_1 & & & \\ C_2 & C_0 & & \\ C_3 & C_1 & & \\ & C_2 & C_0 & \\ & C_3 & C_1 & \\ & & C_2 & C_1 \\ & & C_3 & C_1 \\ & & & C_2 \\ & & & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C_3 \\ C_2 \\ -C_1 \\ C_0 \end{bmatrix} [1]$$

schreiben.

Koeffizientenversatz und Null-Werte sind wiederum auf die Skalierung 2^1 zurückzuführen.

Skalierungsfunktion und Wavelets unterscheiden sich daher in der Implementierung der Iterationen lediglich durch Koeffizientenpermutation und Vorzeichenwechsel der ersten Matrix

$$\begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} -C_3 \\ C_2 \\ -C_1 \\ C_0 \end{bmatrix}$$

, weswegen die dritte Iteration als

$$[W_3] = M_3 M_2 \begin{bmatrix} -C_3 \\ C_2 \\ -C_1 \\ C_0 \end{bmatrix} [1]$$

berechnet werden kann.

Mit den allgemeinen Bestimmungsgleichungen für Skalierungsfunktion⁹

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$$

und Wavelet

$$W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x+k-N+1)$$

ergibt sich für ein **konstantes Integral** der Skalierungsfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) dx$$

wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \stackrel{y:=2x-k}{=} \sum_k c_k \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy$$

die Bedingung

$$\sum_k c_k = 2$$

Aufgrund der "unit-step"-Basisfunktion gilt damit stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$$

Dem Abtast-Theorem der Fourier-Analyse entsprechend muß der Koeffizientenvektor weiter die **"bestmögliche" Approximation des Ausgangssignales** durch die inverse Wavelettransformation

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k)$$

gewährleisten.

Das sogenannte Abtasttheorem besagt, daß eine Funktion aus ihren Abtastwerten genau dann rekonstruiert werden kann, wenn deren Abstände der doppelten signalimmanenten Maximal-Frequenz (Nyquist-Frequenz) entsprechen.

⁹im folgenden wird der Index j nicht mehr aufgeführt

Unter Verwendung des Rechteckimpulses

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & ; |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & ; \text{else} \end{cases}$$

und des Shah-Symbols

$$III(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n) \quad ; \quad \delta(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \Pi\left(\frac{x}{\tau}\right)$$

mit der Fourier-Korrespondenz

$$III\left(\frac{x}{\tau}\right) = \tau III(\tau\omega)$$

ergibt sich für das mit der Shah-Funktion abgetastete Signal

$$\tau^{-1} f(x) III\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_n f(n\tau) \delta(x-n\tau)$$

aufgrund der Äquivalenz von Faltung und Multiplikation in Orts- und Wellenraum über die Ähnlichkeitssätze die Frequenzdarstellung

$$\overline{f(x) III\left(\frac{x}{\tau}\right)} = \tau III(\tau\omega) * \bar{f}(\omega)$$

mit dem Faltungssymbol "*", welche eine Replikation des Signal-Spektrums in Intervallen τ^{-1} darstellt. Beschneidet man das replizierte Spektrum durch Multiplikation mit

$$\Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \quad ; \quad \omega_c = \text{Nyquistfrequenz}$$

, verbleibt ein exaktes "Unikat" des Signal-Spektrums, aus welchem die Ortsraumfunktion rekonstruiert werden kann.

Die (Nyquist-) analoge "**accuracy condition**" der Wavelttransformation fordert nach Strang (1989) periodische Singularitäten (Null-Durchgänge) für die Fourier-Transformierte der Skalierungsfunktion

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_k c_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) e^{-i\xi x} dx$$

, welche sich mit der Substitution $y=2x-k$ rekursiv darstellt als

$$\begin{aligned} P(\xi) &= \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{\frac{-ik\xi}{2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{\frac{-iy\xi}{2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{\frac{-ik\xi}{2}} P\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{aligned}$$

und mittels

$$p\left(\frac{\xi}{2}\right) := \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{\frac{-ik\xi}{2}}$$

verkürzt auf

$$P(\xi) = P\left(\frac{\xi}{2}\right) P\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

, wofür durch Halbierung der Variablen ebenfalls

$$P(\xi) = P\left(\frac{\xi}{2}\right) P\left(\frac{\xi}{4}\right) P\left(\frac{\xi}{4}\right)$$

gilt.

Die Iteration der rechten Seite läßt sich mit

$$P\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{\frac{-ik\xi}{2^j}}$$

fortsetzen bis zur Amplitude der Grundschiwingung $P(0)$, deren Signal-Mittelwert-Eigenschaft in Verbindung mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$$

zu

$$P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{2\pi}$$

führt, weswegen die Fouriertransformierte der Skalierungsfunktion als

$$P(\xi) = \frac{1}{2\pi} \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$$

geschrieben werden kann.

Nach Strang muß

$$P(k2\pi)$$

zur Signalrekonstruktion eine höchstmögliche Zahl m an Singularitäten aufweisen.

Mit $P(\xi=2\pi)$ erhält man als Ableitungsbedingung

$$\frac{d^m P(\xi)}{d\xi^m} = 0$$

für den ersten Faktor des Ausdruckes

$$P(2\pi) = \frac{1}{2\pi} P(\pi) P\left(\frac{\pi}{2}\right) P\left(\frac{\pi}{4}\right) P\left(\frac{\pi}{8}\right) \dots$$

wegen

$$P\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = \frac{1}{2} \sum_k c_k e^{\frac{-ik\xi}{2^j}}$$

durch m-fache Anwendung des Fourier-Ableitungstheoremes

$$\sum_k c_k (-ik)^m e^{-ink} = 0$$

, welche sich durch

$$e^{-ink} = -1^k$$

reduziert auf

$$\sum_k c_k (-1)^k k^m c_k = 0$$

Mit Erfüllung der Bedingung für obigen ersten Faktor besitzt auch $P(2\pi)$ eine Singularität m-ter Ordnung und abgeleitet über die Faktorisierung

$$P(4\pi) = \frac{1}{2\pi} P(2\pi) P(\pi) P\left(\frac{\pi}{2}\right) P\left(\frac{\pi}{4}\right) \dots$$

$P(k\pi)$ allgemein.

Die Bestimmungsgleichungen der Bedingung

$$\sum_k c_k (-1)^k k^m c_k = 0$$

für $m=\{0,1,2,3\}$ lauten daher (Newland 1994)

$$m = 0: c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 - \dots = 0$$

$$m = 1: -c_1 + 2c_2 - 3c_3 + 4c_4 - \dots = 0$$

$$m = 2: -c_1 + 4c_2 - 9c_3 + 16c_4 - \dots = 0$$

$$m = 3: -c_1 + 8c_2 - 27c_3 + 64c_4 - \dots = 0$$

Weitere Randbedingungen der Koeffizienten ergeben sich aus der geforderten **Orthogonalität** der Matrizen $\mathbf{M}_r$.

Erweitert man hierzu den Term des zweiten Iterationsschrittes

$$\phi_2 = M_2 M_1 [1]$$

mit einem später zu konkretisierenden Faktor α , so erhält man für

$$\alpha M_1^t \alpha M_2^t \phi_2 = \alpha M_1^t \alpha M_2^t M_2 M_1 [1]$$

unter den Orthogonalitätsbedingungen

$$\alpha M_2^t M_2 = I ; \alpha M_1^t M_1 = I$$

die Form

$$\alpha^2 M_1^t M_2^t \phi_2 = [1]$$

, aus welcher sich für M_1 über

$$\alpha M_1^t M_1 = \alpha \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = 1$$

die allgemeine Bedingung

$$\sum_k c_k^2 = \frac{1}{\alpha}$$

ableitet.

Analog läßt sich im Fall der D4-Wavelets bezüglich M_2 die Gleichung

$$\alpha M_2^t M_2 = \alpha \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & & \\ & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \\ & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ & & & & & & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

aufstellen, deren ausmultiplizierte rechte Seite

$$\alpha \begin{bmatrix} c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_2 c_0 + c_3 c_1 & 0 & 0 \\ c_0 c_2 + c_1 c_3 & c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_2 c_0 + c_3 c_1 & 0 \\ 0 & c_0 c_2 + c_1 c_3 & c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 & c_2 c_0 + c_3 c_1 \\ 0 & 0 & c_0 c_2 + c_1 c_3 & c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 \end{bmatrix}$$

auf die zusätzliche Bedingung

$$c_0 c_2 + c_1 c_3 = 0$$

für die Nicht-Diagonalelemente führt.

Da sich bei beliebigem Koeffizientenvektor die Nicht-Diagonal-Elemente p_{ij} der allgemeinen Produktmatrix

$$[M^t M]_{I \times I} \quad ; \quad I = 2^{r+1} + 2^r - 2$$

mit $\Delta_{ij} = 0$ nach dem Schema

$$[[2i \text{ Nullen}] [c_0 \ c_1 \ c_2 \ \dots] [2(I-1-i) \text{ Nullen}]] \begin{bmatrix} [2(i+\Delta_{i,j}) \text{ Nullen}] \\ [c_0] \\ [c_1] \\ [c_2] \\ \vdots \\ [2(I-1-i-\Delta_{i,j}) \text{ Nullen}] \end{bmatrix}$$

errechnen, ergibt sich für eine Orthogonalität

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx = 0 \quad ; \quad m \in \mathbb{N}_{+,-} \setminus \{0\}$$

die Verallgemeinerung

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

, wie aus folgendem Gedankengang ersichtlich:

Wegen der Orthogonalität der "unit-step-function" für ganzzahlige Translationen verschwindet das über die Bildungsvorschrift

$$\phi_1(x) = \sum_k c_k \phi_0(2x-k)$$

gewonnene Faltungsintegral

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x) \phi_1(x-m) dx &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_k c_k \phi_0(2x-k) \sum_j c_j \phi_0(2x-2m-j) dx &= \\ \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(2x-k) \phi_0(2x-2m-j) dx \end{aligned}$$

für $k \neq 2m+j$ und reduziert sich über die Substitution $j:=k-2m$ auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x) \phi_1(x-m) dx = \sum_k c_k c_{k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2(2x) dx$$

, woraus unter obiger Forderung

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

unmittelbar die Orthogonalität des zweiten und fortgeführt aller weiteren Iterationsschritte folgt.

Daher kürzt sich die Signal-Energie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k \sum_j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) \phi(2x-j) dx$$

auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x-k) dx \quad y := 2x-k \quad \frac{1}{2} \sum_k c_k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(y) dy$$

woraus man sofort

$$\sum_k c_k^2 = 2$$

erhält und mit obiger Bedingung

$$\sum_k c_k^2 = \frac{1}{\alpha}$$

für den Hilfsfaktor ableitet.

Zu zeigen sind nun noch die Randbedingungen der Orthogonalitäten Wavelet-Wavelet, bzw. Wavelet-

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Skalierungsfunktion.

Die über die Bestimmungsgleichungen

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$$

, bzw.

$$W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x+k-N+1)$$

gefundenene Kreuzkorrelation

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x-m) dx = \sum_k (-1)^k c_k \sum_j c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x+k-N+1) \phi(2x-2m-j) dx$$

wird für $2m+j \neq N-1-k$ Null und verkürzt sich unter der verbleibenden Beziehung $j=N-1-k-2m$ auf

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x-m) dx = \sum_k (-1)^k c_k c_{N-1-k-2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x) dx$$

Die Glieder der Summe

$$\sum_k (-1)^k c_k c_{N-1-k-2m}$$

heben sich nun bei einer geraden Koeffizientenzahl N mit $k_2=N-1-k_1-2m$ für alle m wegen der Entsprechung

$$(-1)^{k_1} c_{k_1} c_{N-1-k_1-2m} = -(-1)^{k_2} c_{k_2} c_{N-1-k_2-2m}$$

paarweise auf, woraus man als hinreichende Orthogonalitätsbedingung $N \bmod 2 = 0$ folgert.

Da sich die verschobene Skalierungsfunktion

$$\phi(x-m)$$

gemäß iterativer Bildungsvorschrift

$$\phi(x) = \sum_k c_k \phi(2x-k)$$

darstellt als Summe

$$\phi(x-m) = \sum_k c_k \phi(2x-2m-k)$$

, deren Glieder wie gezeigt orthogonal zu $W(2x)$ sind, gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(2x) \phi(x-m) dx = 0$$

, d.h. die Kreuzkorrelationen aller Translationen der Skalierungsfunktion mit dem unverschobenen Wavelet des Levels 1 und verallgemeinerbar für alle weiteren Level verschwinden ebenfalls.

Die gleiche Hilfsüberlegung rekursiver Definition führt auf die Orthogonalität eines unverschobenen Wavelet mit den Wavelets der nächsten ($\rightarrow$ aller anderen) Skalierungsstufen

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(2x-m) dx = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

, denn

$$W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x+k-N+1)$$

besteht gleichfalls aus Summanden, deren Orthogonalität zu $W(2x-m)$ bereits gezeigt wurde.

Die Autokorrelationen der Wavelets innerhalb eines Levels

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(x-m) dx = \sum_k \sum_j (-1)^k (-1)^j c_k c_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x+k-N+1) \phi(2x+j-N+1-2m) dx$$

schließlich verschwinden nur für $k=j-2m$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(x-m) dx = \sum_k (-1)^{2(k+m)} c_k c_{k+2m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(2x) dx$$

nicht, woraus die bereits bekannte Bedingung

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

resultiert.

Man sieht in sehr schöner Weise, wie sich die Orthogonalität der Verschiebungen eines einzigen Initialbausteines, der "unit-step-function" in einen rekursiv abgeleiteten Funktionenraum, dessen Basisvektoren nicht durch analytische Ausdrücke fassbar sind, abbildet.

Enthält der Koeffizientenvektor $\mathbf{c}$ mit

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad ; \quad m \neq 0$$

demnach eine gerade Anzahl Elemente, so gelten (Newland 1994) die Orthogonalitäten

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi(x-m) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} W(x) \phi(x-m) dx &= \begin{cases} 0 & ; m \neq 0 \\ 1 & ; m=0 \end{cases} \\ \int_{-\infty}^{\infty} W(2^j x) \phi(x-m) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(2^j x-m) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} W(x) W(x-m) dx &= \begin{cases} 0 & ; m \neq 0 \\ 1 & ; m=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Die normalisierte Fläche der Integrale mit $m=1$ resultiert aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_0^2 dx = 1$$

, während nach Strangs "accuracy-condition" (cf. oben)

$$\sum_k c_k (-1)^k k^m c_k = 0$$

für $m=0$

$$\sum_k (-1)^k c_k = 0$$

wegen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx &= W(x) = \sum_k (-1)^k c_k \phi(2x+k-N+1) = \\ &= \sum_k (-1)^k c_k \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) dy \end{aligned}$$

die Fläche "unter" einem Wavelet stets

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) dx = 0$$

ergibt.

Das aus den genannten Bedingungen für
ein konstantes Integral der Skalierungsfunktion

$$\sum_k c_k = 2$$

,periodische Nullstellen ihrer Fourier-Transformierten

$$\sum_k c_k (-1)^k k^m c_k = 0$$

und Orthogonalität der Basisvektoren

$$N \bmod 2 = 0$$

$$\sum_k c_k^2 = 2$$

$$\sum_k c_k c_{k+2m} = 0 \quad ; \quad m=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$$

gefundene Gleichungssystem wurde erstmals von I. Daubechies 1989 aufgestellt, nach ihr benannte Koeffizientenvektoren D_x ($x=4,6,8,\dots$) liegen tabelliert vor oder können numerisch gelöst werden.

Wie anhand Fig. 26 ersichtlich nähern sich Wavelets mit absteigendem Skalierungs-Level wegen der starken Spreizung über dem Signalintervall einer durch die Basisfunktion vorgegebenen Konstante,

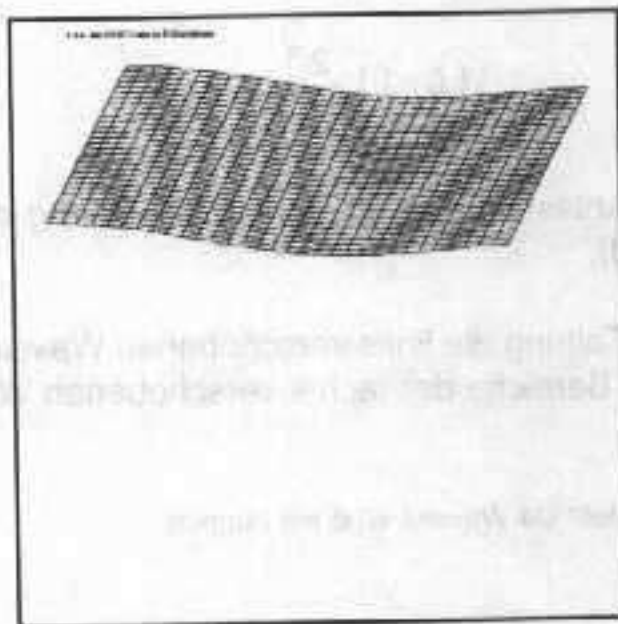


Fig. 26: D20-Wavelet $W(x)$ über Signalintervall

so etwa im Fall der Haar-Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -0.5 & ; 0 \leq x \leq 0.5 \\ 0.5 & ; -0.5 < x \leq 1 \\ 0 & ; \text{else} \end{cases}$$

für alle Level j ($j \leq -1$) für $0 \leq x \leq 1$ dem Wert -1, weswegen die Signal-Beiträge ebenfalls konstant sind.

Da die abgeleitete Haar-Skalierungsfunktion für das Intervall $0 \leq x \leq 1$ stets 1 ist, kann man mit ihrer Hilfe für eine Funktion

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k)$$

die Waveletteilsumme der Level j ($j \leq -1$) mit einem neuen Koeffizientensatz $c_{\phi,k}$ darstellen als Reihe

$$\sum_{j=-\infty}^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\phi,k} \phi(x - k)$$

, deren Allgemeingültigkeit unter Annahme eines "Wrap-Around" (cf. unten) von Chui (1992) bewiesen wurde.

Die Bedeutung des alternativen Ausdrucks

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\phi,k} \phi(x - k) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} W(2^j x - k)$$

liegt vor allem in der praktischen Implementierung des Algorithmus, welche die Amplituden aller Wavelet-Level j ($j \leq -1$) nun in einem einzigen Koeffizienten a_0 fassen kann.

Aufgrund obiger Eigenschaft der Skalierungsfunktion normiert man den Ortsraum¹⁰ auf das Intervall $0 \leq x \leq 1$ und postuliert die Diskrete Wavelet-Transformation als geschlossene Ring-Faltung¹¹, wodurch der Support eines Wavelets

$$(L-1) \frac{2^m}{2^j}$$

bei Koeffizientenvektorenlänge L und Abtastintervall 2^m mehrfach entlang der X -Achse um das Signal "gewickelt" sein kann (**Wrap-Around**).

Infolgedessen können für eine Ring-Faltung die links verschobenen Wavelets $W(2^j x + k)$ ($k \in \mathbb{N}_+$) in der Implementierung durch überragende Bereiche der rechts verschobenen Wavelets eingespart werden.

Z.B. ersetzt ein dergestalt "gewrapptes" D4-Wavelet $W(x)$ mit Support

¹⁰ Im Rahmen der Diskreten-Fourier-Transformation erfolgt eine ähnliche Normung auf die Periode der Grundschiwingung 2π

¹¹ circular convolution: cf. oben

$$(4-1) \frac{2^0}{2^0} = 3$$

über dem Norm-Intervall durch 2-maligen Umschlag Mittelteil von $W(x+1)$ und Schwanz von $W(x+2)$.

Über den Amplitudenvektor $\mathbf{a}$ stellt sich die Abbildung einer normierten Funktion in den "gewrappten" D4-Vektorraum demnach dar als

$$f(x) = a_0 \phi(x) + a_1 W(x) + [a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} W(2x) \\ W(2x-1) \end{bmatrix} + [a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7] \begin{bmatrix} W(4x) \\ W(4x-1) \\ W(4x-2) \\ W(4x-3) \end{bmatrix} + \dots + a_{2^j+k} W(2^j x - k) + \dots$$

, wobei wegen Konstanz der "gewrappten" Skalierungsfunktion über dem Intervall $0 \leq x \leq 1$ (Chui 1993) wie oben dargelegt die Beiträge aller Level j ($j \leq -1$) in der Amplitude a_0 enthalten sind.

Integriert man die um $W(2^j x - k)$ erweiterte Gleichung, so zeigt sich aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften die Äquivalenz

$$\int f(x) W(2^j x - k) dx = a_{2^j+k} \int W^2(2^j x - k) dx$$

, woraus man für die Amplitude wegen

$$\int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x) dx = 1$$

auf

$$a_{2^j+k} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) W(2^j x - k) dx}{\frac{1}{2^j} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(x) dx} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(x) W(2^j x - k) dx$$

schließt, bzw. für das erste innere Produkt

$$a_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi(x) dx$$

erhält (Newland 1994).

Die Integrationsgrenzen sind für das Normintervall auf 0 und 1 zu setzen.

Mit "**Mallat's pyramidal algorithm**" existiert ein Algorithmus, dessen Rechengeschwindigkeit gerade bei mehrdimensionalen Transformationen nach Erfahrung des Autors bei weitem über derjenigen etwa einer 2-dimensionalen Fast-Fourier-Transform liegt, da die iterative Definition der Basisvektoren für das "gewrappte" Normintervall $0 \leq x \leq 1$ die Innere-Produkt-Bildung durch fortgesetzte Konvolution des Koeffizientenvektors mit dem Vektor der Faltungsintegrale aller vorherigen Stufen erlaubt, wie die folgenden Ausführungen für D4-Wavelets verdeutlichen.

Rekonstruiert man den Signalanteil der Skalierungsfunktion aus der ersten Komponente eines gefundenen Amplitudenvektors

$$\mathbf{a} = [a_0 \ a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \dots a_{2^j+k} \dots]$$

, so erhält man für die Iterationsschritte

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [a_0]$$

und

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0 & & & & & \\ c_1 & & & & & \\ c_2 & c_0 & & & & \\ c_3 & c_1 & & & & \\ & c_2 & c_0 & & & \\ & c_3 & c_1 & & & \\ & & c_2 & c_0 & & \\ & & c_3 & c_1 & & \\ & & & c_2 & c_0 & \\ & & & c_3 & c_1 & \\ & & & & c_2 & \\ & & & & c_3 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} [a_0]$$

die "gewrappte" Darstellung

$$\phi_2 = \begin{bmatrix} c_0 & c_2 \\ c_1 & c_3 \\ c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0+c_2 \\ c_1+c_3 \end{bmatrix} [a_0]$$

, in welcher die Faltungskerne um das "senkrecht gedachte" Normintervall gewickelt sind.

Jede Zelle obiger Faltungsmatrizen entspricht einer zu dem zugehörigen Level rekonstruierten Abszisse des Normintervalles.

Die via Skalierungsfunktion in der Amplitude a_0 gefaßten Signal-Teile der Level j ($j \leq -1$) werden so etwa für eine Abtastlänge 2^4 mit der Faltungsfolge

$$\phi_3 = \begin{bmatrix} C_0 & & & C_2 \\ C_1 & & & C_3 \\ C_2 & C_0 & & \\ C_3 & C_1 & & \\ & C_2 & C_0 & \\ & C_3 & C_1 & \\ & & C_2 & C_0 \\ & & C_3 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & C_2 \\ C_1 & C_3 \\ C_2 & C_0 \\ C_3 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 + C_2 \\ C_1 + C_3 \end{bmatrix} [a_0]$$

rücktransformiert.

Setzt man

$$M_1 = \begin{bmatrix} C_0 + C_2 \\ C_1 + C_3 \end{bmatrix}$$

und

$$M_2 = \begin{bmatrix} C_0 & C_2 \\ C_1 & C_3 \\ C_2 & C_0 \\ C_3 & C_1 \end{bmatrix}$$

, sowie

$$M_3 = \begin{bmatrix} C_0 & & & C_2 \\ C_1 & & & C_3 \\ C_2 & C_0 & & \\ C_3 & C_1 & & \\ & C_2 & C_0 & \\ & C_3 & C_1 & \\ & & C_2 & C_0 \\ & & C_3 & C_1 \end{bmatrix}$$

kann man auch kurz

$$f^\phi(x) = M_3 M_2 M_1 a_0$$

, bzw. nach eingeführter Notation mit Bezug auf die Ordinatenabstände (1:2)

$$a_0 = f^{(0)}(1) \xrightarrow{M_1} f^{(0)}(1:2) \xrightarrow{M_2} f^{(0)}(1:4) \xrightarrow{M_3} f^{(0)}(1:8)$$

schreiben.

Da alle Wavelets durch eine verschobene Faltung mit Vorzeichenwechsel aus der Skalierungsfunktion hervorgehen, ersetzt man in obigem Schema die Matrix

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{durch} \quad \begin{bmatrix} -c_3 \\ c_2 \\ -c_1 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

"wrapped" letztere gemäß

$$G_1 = \begin{bmatrix} -c_3 - c_1 \\ c_2 + c_0 \end{bmatrix}$$

und erhält analog

$$f^{(0)}(1:8) = M_3 M_2 G_1 a_1$$

, bzw.

$$a_1 = f^{(0)}(1) \xrightarrow{G_1} f^{(0)}(1:2) \xrightarrow{M_2} f^{(0)}(1:4) \xrightarrow{M_3} f^{(0)}(1:8)$$

für die Rekonstruktion des Level 0.

In gleicher Weise ergibt sich die Rücktransformation des Level 1 mit 2^1 Wavelets durch

$$G_2 = \begin{bmatrix} -c_3 & -c_1 \\ c_2 & c_0 \\ -c_1 & -c_3 \\ c_0 & c_2 \end{bmatrix}$$

als

$$f^{(1)}(1:8) = M_3 G_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_2} f^{(1)}(1:4) \xrightarrow{M_3} f^{(1)}(1:8)$$

und die amplitudengewichteten Wavelets des Level 2 überlagern sich zu

$$f^{(2)}(1:8) = \begin{bmatrix} -C_3 & & & -C_1 \\ C_2 & & & C_0 \\ -C_1 & -C_3 & & \\ C_0 & C_2 & & \\ & -C_1 & -C_3 & \\ & C_0 & C_2 & \\ & & -C_1 & -C_3 \\ & & C_0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} \xrightarrow{G_3} f^{(2)}(1:8)$$

, so daß

$$f(1:8) = f^{\phi}(1:8) + f^{(0)}(1:8) + f^{(1)}(1:8) + f^{(2)}(1:8)$$

Da sich die Wavelet-Zahl mit jeder Skalierungsstufe verdoppelt, reduziert sich die Zahl der für 8 Abszissenwerte erforderlichen Matrizenmultiplikationen je Stufe um 1, wie in dem Mallat-Schema

$$f'(1) \xrightarrow{M_1} f'(1:2) \xrightarrow{M_2} f'(1:4) \xrightarrow{M_3} f(1:8) = f$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ a(0) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_1 \uparrow \\ a(1) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_2 \uparrow \\ a(2:3) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} G_3 \uparrow \\ a(4-7) \end{bmatrix}$$

zum Ausdruck kommt.

Man erkennt die Entstehung immer feinerer Approximationsstufen jeweils verdoppelter Punkt-Zahl über rekursive Faltung mit kaskadierenden Hoch- und Tiefpaßfiltern.

Führt man

$$\begin{aligned} H_{(ighpass)} &= G^t \\ L_{(owpass)} &= M^t \end{aligned}$$

ein, kann man die oben für den Hilfsfaktor $\alpha=2^{-0.5}$ bewiesenen, auf G , verallgemeinerbaren (Chui 1993) Orthogonalitätsbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_r^t M_r &= I \\ M_r^t G_r &= 0 \\ G_r^t M_r &= 0 \\ \frac{1}{2} G_r^t G_r &= I \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
 G_r &= G(2^r \times 2^{r-1}) \\
 H_r &= H(2^{r-1} \times 2^r) \\
 L_r &= L(2^{r-1} \times 2^r) \\
 M_r &= M(2^r \times 2^{r-1})
 \end{aligned}$$

als

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} LM &= I \\
 LG &= 0 \\
 HM &= 0 \\
 \frac{1}{2} HG &= I
 \end{aligned}$$

schreiben und

$$f^\phi(x) = M_3 M_2 M_1 a_0$$

nach

$$a_0 = \frac{1}{2} L_1 \frac{1}{2} L_2 \frac{1}{2} L_3 f^\phi$$

auflösen.

Da

$$f = f^\phi + M_3 M_2 G_1 \begin{bmatrix} a_1 \end{bmatrix} + M_3 G_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + G_3 \begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix}$$

und somit

$$\frac{1}{2} L_1 \frac{1}{2} L_2 \frac{1}{2} L_3 f = \frac{1}{2} L_1 \frac{1}{2} L_2 \frac{1}{2} L_3 f^\phi + 0 + 0 + 0$$

, darf man f^ϕ durch f ersetzen und erhält die Amplitude der Skalierungsfunktion

$$a_0 = \frac{1}{2} L_1 \frac{1}{2} L_2 \frac{1}{2} L_3 f$$

als wiederholte Tiefpassfilterung des Ausgangssignales.

Ebenso ergeben sich

$$a_1 = \frac{1}{2} H_1 \frac{1}{2} L_2 \frac{1}{2} L_3 f$$

, sowie

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_2 L_3 f$$

und letztlich

$$\begin{bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_3 f$$

durch eine rekursive Quadraturfilterung nach dem Mallat-Schema

$$\begin{array}{ccccccc} f'(1) & \xrightarrow{\frac{1}{2} L_1} & f'(1:2) & \xrightarrow{\frac{1}{2} L_2} & f'(1:4) & \xrightarrow{\frac{1}{2} L_3} & f(1:8) = f \\ \downarrow & & \downarrow \frac{1}{2} H_1 & & \downarrow \frac{1}{2} H_2 & & \downarrow \frac{1}{2} H_3 \\ a = [a(0) & a(1) & a(2,3) & a(4-7)] \end{array}$$

Fig. 27-30 zeigen den Luminanz-Auszug eines gegrabten S-VHS-Bildes¹² nach **schematischer Elimination von 75% und 93.4 % der Daten** durch Rücktransformation einer linken oberen Submatrix des Wavelet-Spektrums, bzw. nach Fourier-Tiefpass.

Die für menschliche Mustererkennung und Klassifikation im Rahmen neuronaler Netze wesentliche Information kann somit unter der gezeigten Integraltransformation unter hohen Reduktionsfaktoren extrahiert werden.

Die auf dem vorliegenden Medium scheinbar bessere "Qualität" des Fourier-gefilterten Bildes beruht teilweise auf der wegen reduzierter Drucker- und Kopiererauflösung augenfreundlichen Tiefpass-Wirkung. Tatsächlich weist das Wavelet-gefilterte Bild auf dem Monitor eine wesentlich höhere Kanten- und Detailtreue auf, zeigt aber aufgrund der Basisfunktion auch die Neigung zu eckiger Aufrasterung mit Artefaktbildung bei geringen Restdatenmengen wie aus Fig. 31-33, den Plots der Laterne im linken Bildteil, ersichtlich.

Erstaunlich bleibt nach Ansicht des Autors, **welch kleinen Teil der auf den ersten Blick überwältigenden¹³ Datenfülle die dominierende visuelle Information letztlich nur ausmacht.**

¹²Die Klimameßstation im rechten unteren Bildteil wurde oben als Wireframe gezeigt.

¹³Ein 512x512 Bildausschnitt umfaßt 262.144 Byte Daten pro Kanal.



Fig. 27: Luminanz-Auszug eines S-VHS-Bildes



Fig. 28: Datenreduktion um 75% im angegebenen Ausschnitt nach Wavelet-Transformation

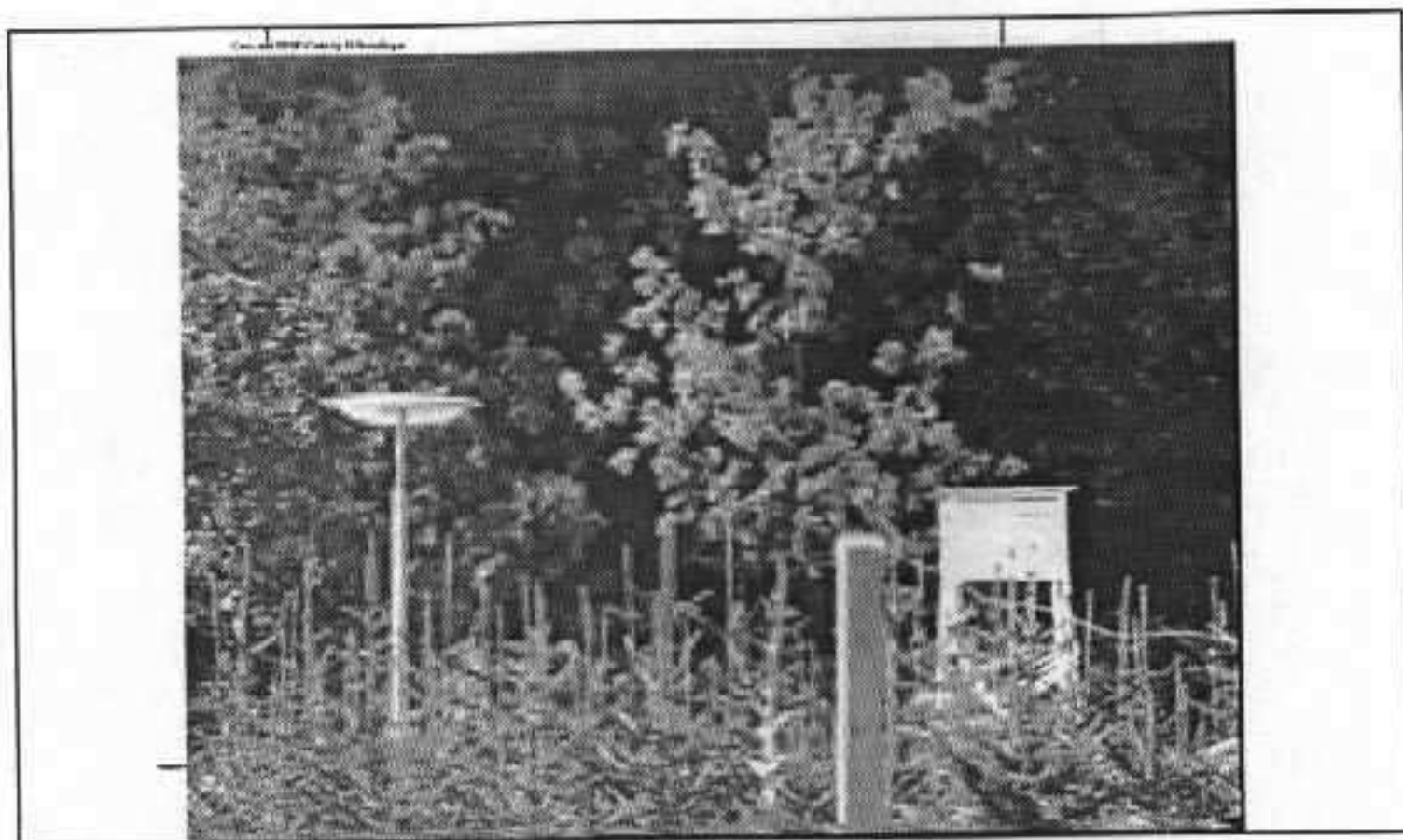


Fig. 29: Datenreduktion um 93.4 % im angegebenen Ausschnitt nach Wavelettransformation

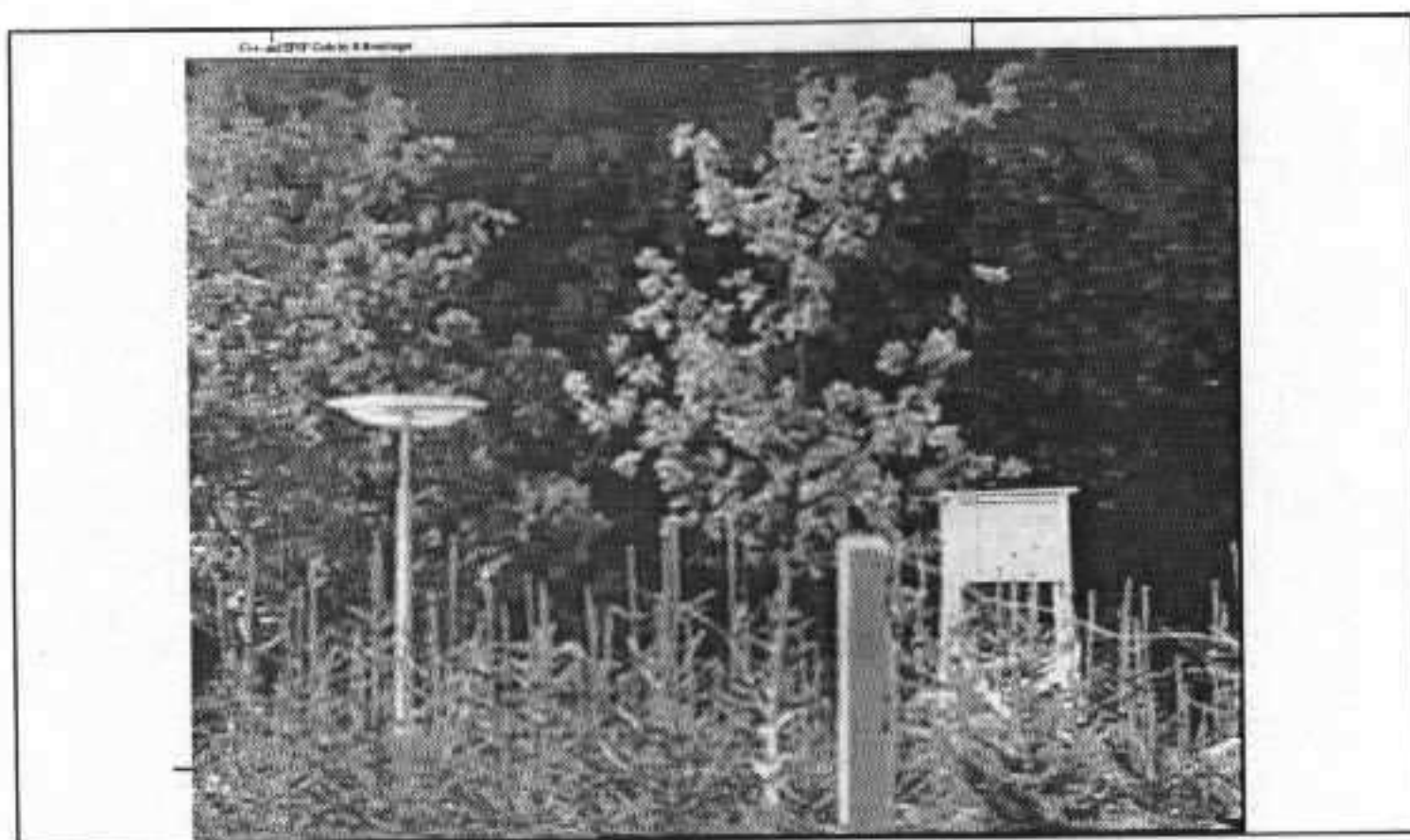


Fig. 30: Datenreduktion um 93.4 % im angegebenen Ausschnitt nach Fourier-Tiefpass

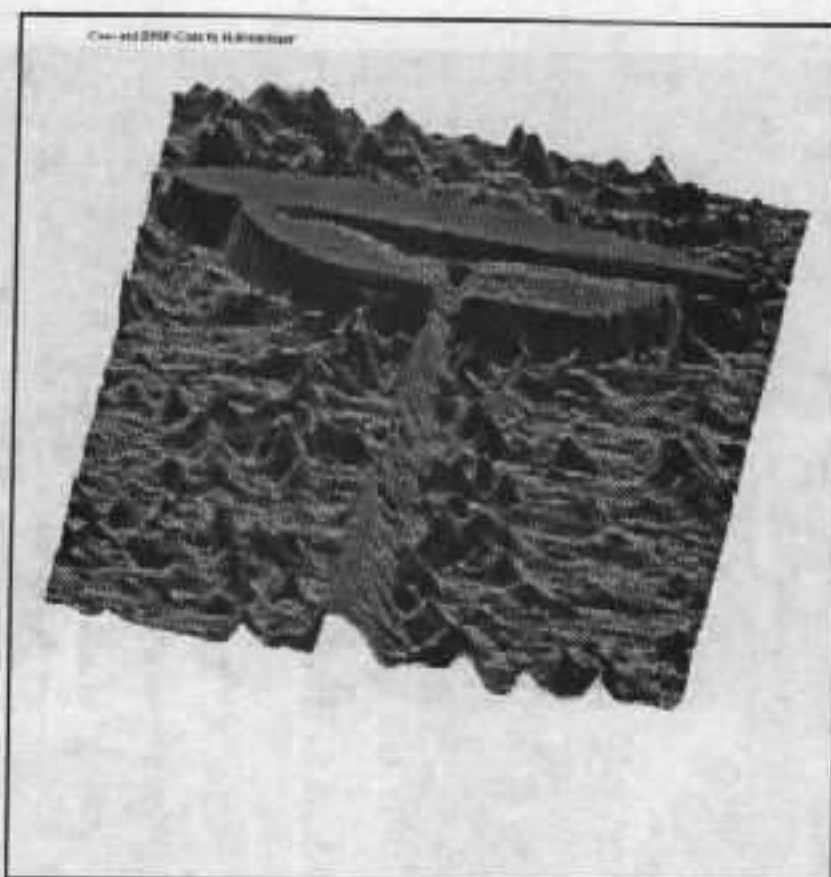


Fig. 31: Original (Laterne im linken Bildteil)

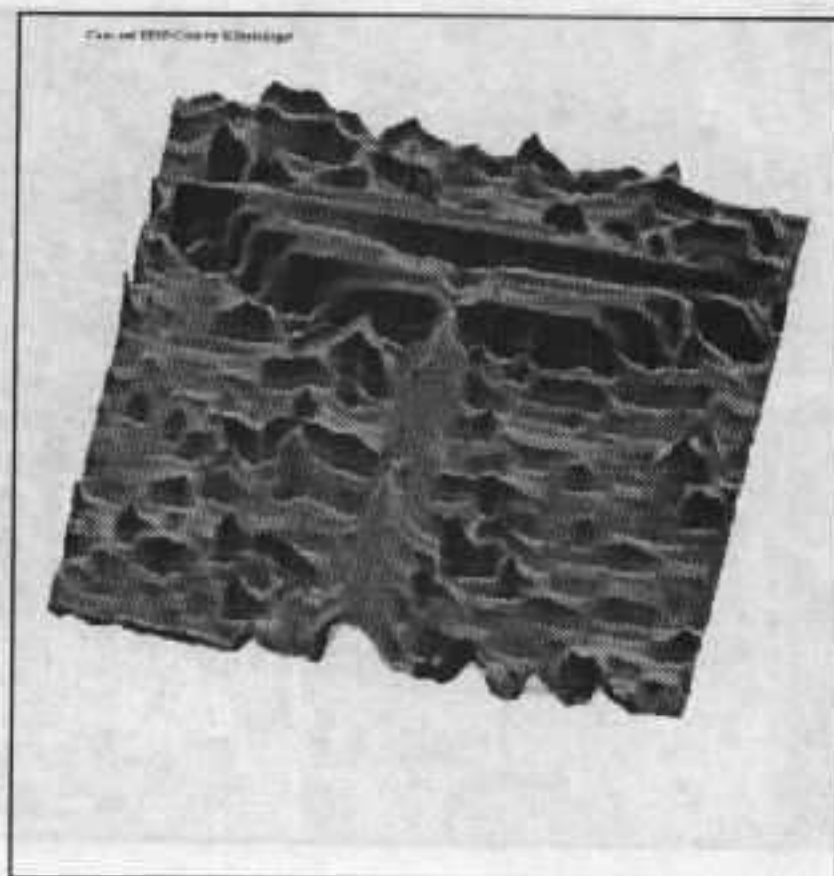


Fig. 32: Datenreduktion um 93,4 % nach Wavelet-Transformation

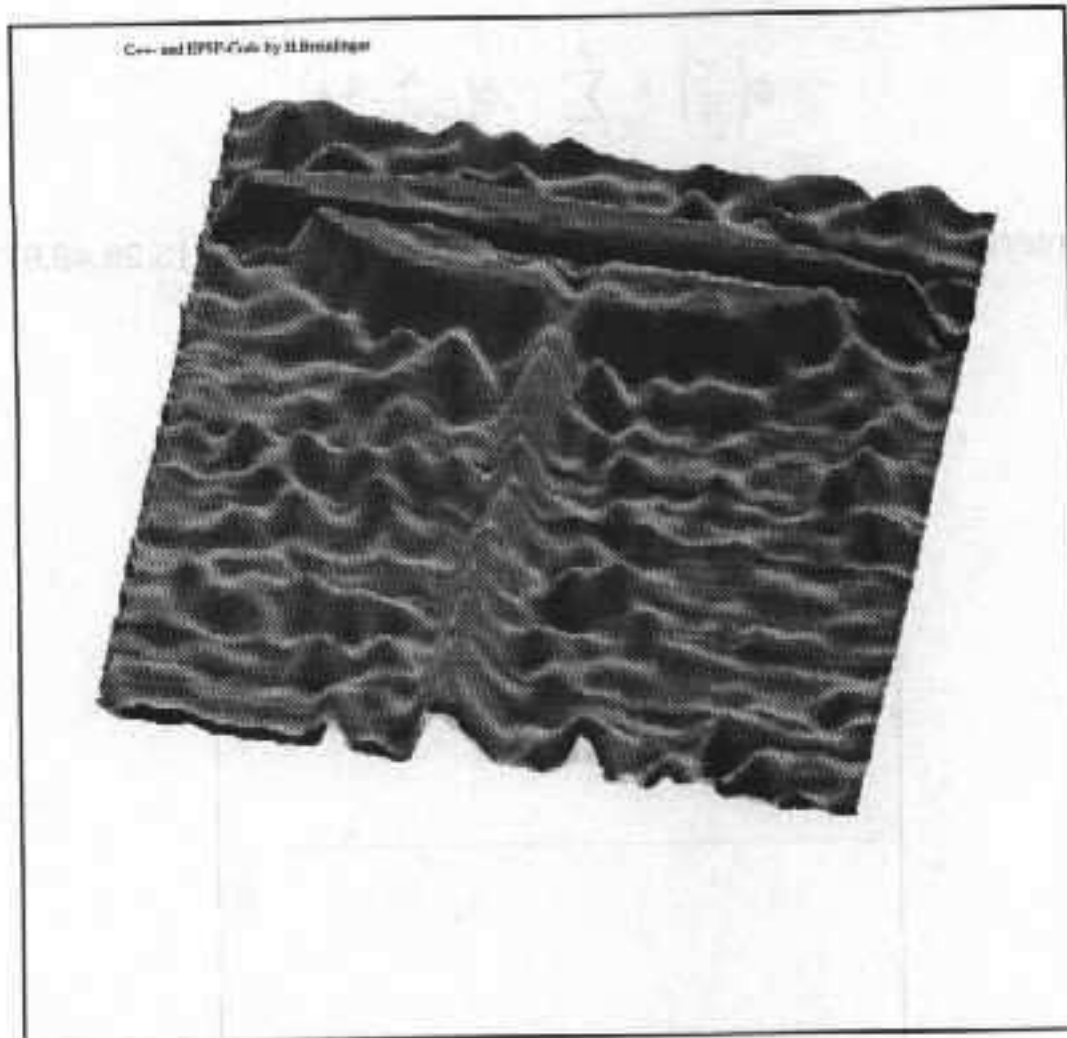


Fig. 33: Datenreduktion um 93.4 % nach Fourier-Tiefpass

Fig. 34-38 zeigen als Abschluß des Kapitels die Skalierungsfunktion der D4-Wavelets mit einem Support $0 \leq x \leq 3$ in mehreren Approximationsstufen, welche nach einem Vorschlag von Newland (1994) über folgendes Rekursionsschema programmiert wurden:

Bei bekannten Anfangswerten

$$\phi(0), \phi(1), \phi(2), \phi(3)$$

kann man die Bestimmungsgleichung

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^3 c_k \phi(2x-k)$$

durch Substitution

$$x := \frac{x}{2^j} \quad ; \quad j=1, 2, 3, \dots$$

umformen zu

$$\phi\left(\frac{x}{j}\right) = \sum_{k=0}^3 c_k \phi\left(\frac{x}{2^{j-1}} - k\right)$$

und über iterative Intervallhalbierung beliebig viele Zwischenwerte (4,7,13,25,49,97,...) errechnen.

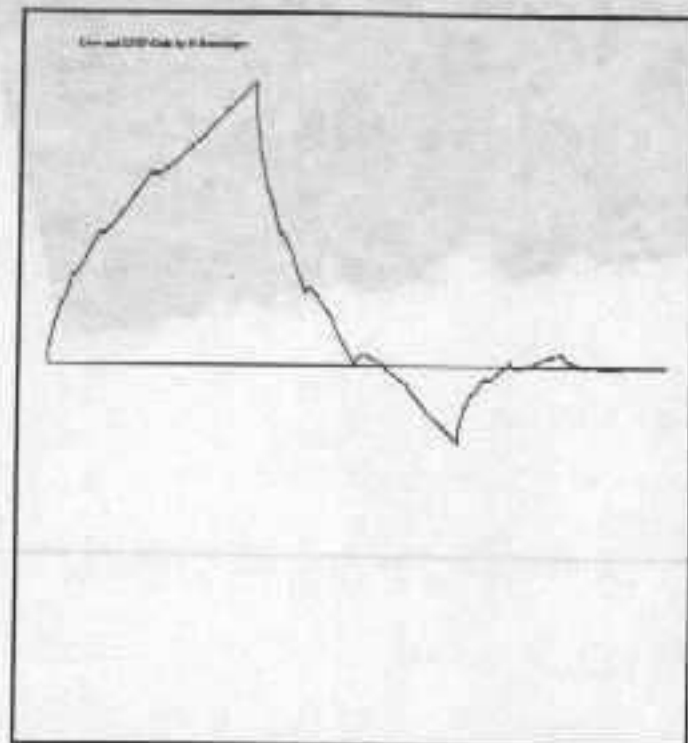


Fig. 34: D4-Skalierungsfunktion aus 1537 errechneten Werten $0 \leq x < 3$; $-0.5 < y < 1.5$

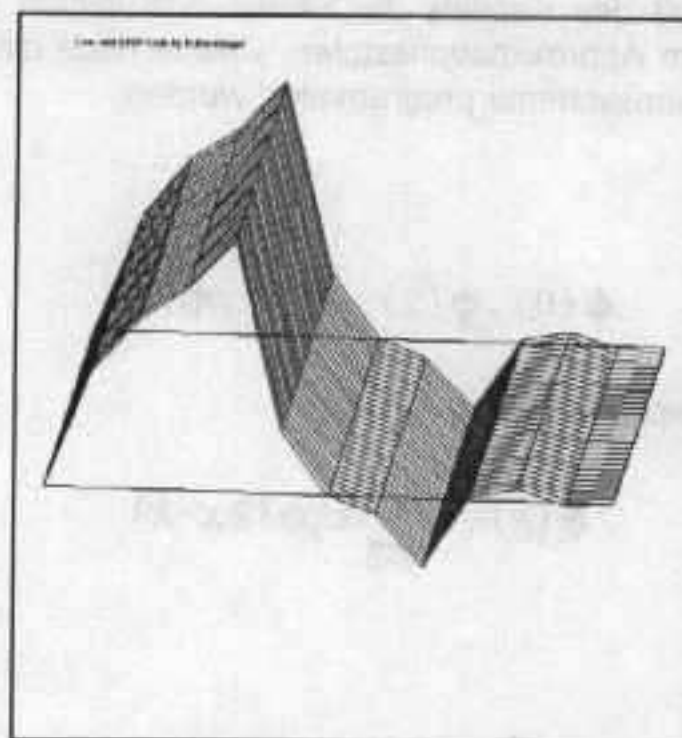


Fig. 35: D4-Skalierungsfunktion : 13 Werte

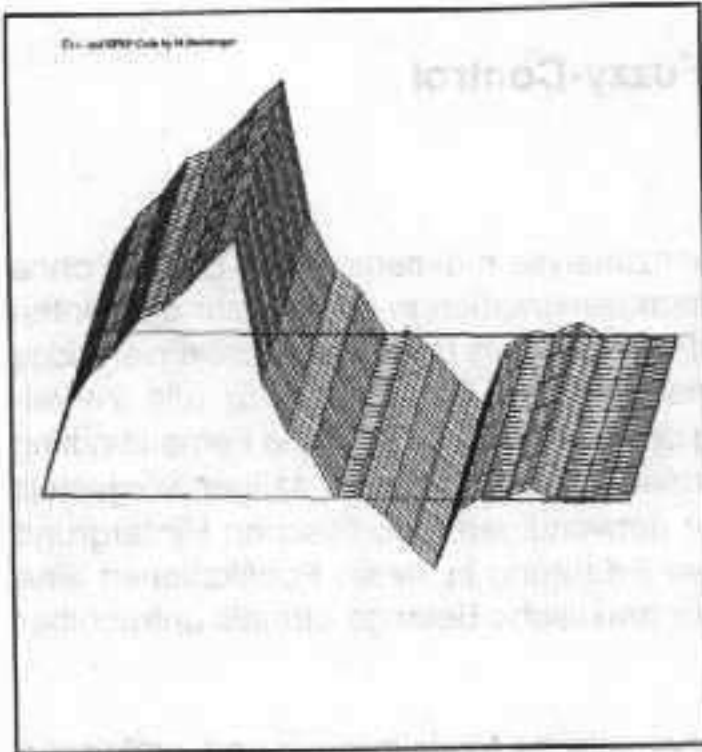


Fig. 36: D4-Skalierungsfunktion: 25 Werte

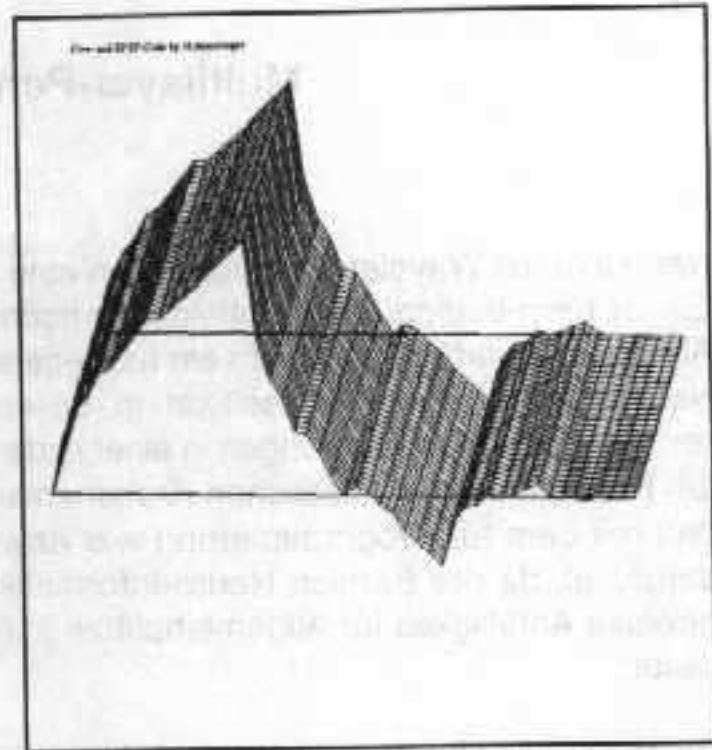


Fig. 37: D4-Skalierungsfunktion: 49 Werte

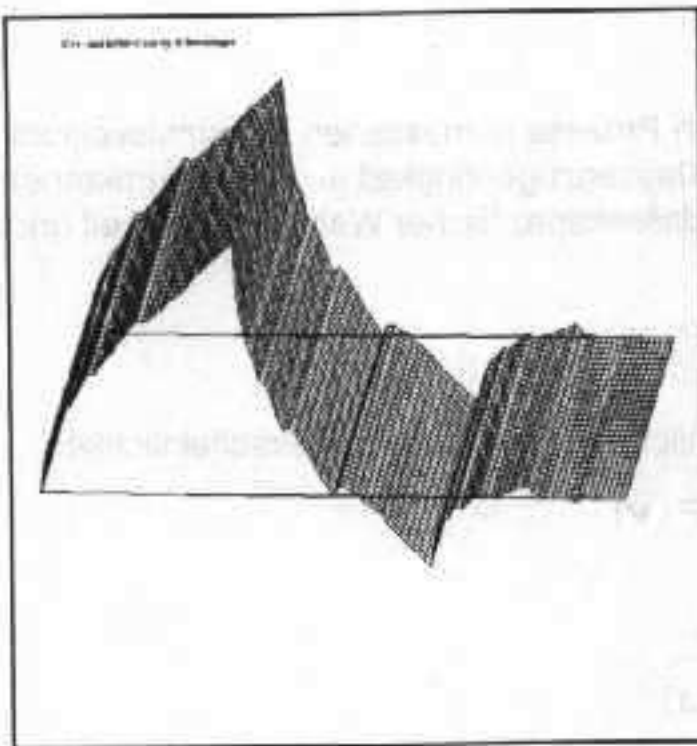


Fig. 38: D4-Skalierungsfunktion: 97 Werte

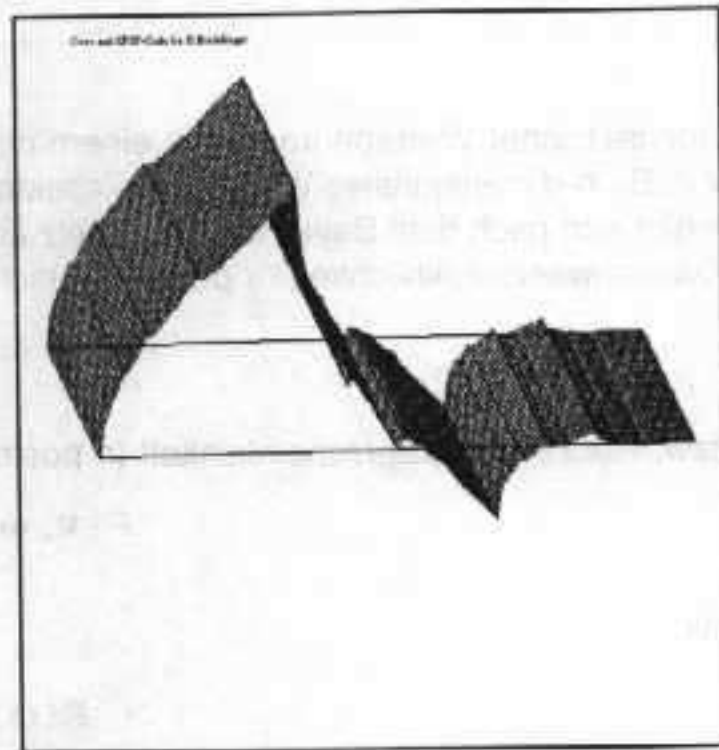


Fig. 39: D4-Skalierungsfunktion: 193 Werte

Multilayer-Perceptron und Fuzzy-Control

Nachdem mit Wavelet-Transformation eine lokalisierte Frequenzanalyse n-dimensionaler Signale ohne Gabor-Kern-bedingte Randeffekte für hochverdichtende Merkmalsextraktion in einem sehr effizienten Algorithmus verfügbar ist, wird ein fuzzy-geregeltes Multilayer-Perceptron als universell approximierendes Neuronales Netz zur Klassifikation beliebiger (wavelettransformierter) Datensätze für alle zeitreihenbezogenen Fragestellungen in einer ersten Implementierung des Autors für die forstliche Fernerkundung am Problem der automatischen Kronenerkennung bei detailarmen Video-Luminanzauszügen vorgestellt und mit dem für Programmierung wie Anwendungs-Transfer notwendigen theoretischen Hintergrund dargelegt, da der Bereich Neuro-Informatik nach persönlicher Erfahrung in vielen Publikationen eine gewisse Anfälligkeit für Allgemeinplätze aufweist und somit für praktische Belange oftmals unfruchtbar bleibt.

Die folgenden Überlegungen beschränken sich daher auf mathematische Modellbildung und praktische Implementierung.

Für historische Entwicklung und Analogien zu biologischen Systemen wird auf die in diesem Bereich umfangreiche Literatur verwiesen.

Die Verbundwahrscheinlichkeit

$$P(\mathbf{v}, \omega)$$

stochastischer Wertepaare des in einem mustererzeugenden Prozess gemessenen Merkmalsvektors $\mathbf{v}$ (z.B. n-dimensionales Wavelet-Teilspektrum) und seiner Klassenzugehörigkeit ω (z.B. Baumkrone) ergibt sich nach dem Bayes'schen Gesetz aus dem Produkt klassenspezifischer Wahrscheinlichkeit und Klassenwahrscheinlichkeit (a priori-Wahrscheinlichkeit)

$$P(\mathbf{v}, \omega) = P(\mathbf{v}|\omega) P(\omega)$$

bzw. Rückschlußwahrscheinlichkeit (a posteriori-Wahrscheinlichkeit) und Auftretswahrscheinlichkeit

$$P(\mathbf{v}, \omega) = P(\omega|\mathbf{v}) P(\mathbf{v})$$

mit

$$P(\omega) = \sum_{\mathbf{v}} P(\mathbf{v}, \omega)$$

und

$$P(\mathbf{v}) = \sum_{\omega} P(\mathbf{v}, \omega)$$

Vernachlässigt man Kostenfunktionen, so gehorchen die Klassenschätzungen

$$\hat{\omega}$$

des Bayes-Klassifikators der maximalen Rückschlußwahrscheinlichkeit

$$P(\hat{\omega}|\mathbf{v}) = \max_{\hat{\omega}} \{P(\hat{\omega}|\mathbf{v})\}$$

, welche wegen

$$P(\hat{\omega}|\mathbf{v}) = \frac{P(\mathbf{v}|\hat{\omega}) P(\hat{\omega})}{P(\mathbf{v})}$$

Kenntnis der apriori-Wahrscheinlichkeiten voraussetzt, diejenige des Maximum-Likelihood-Klassifikators hingegen allein der klassenspezifischen Auftretswahrscheinlichkeit

$$P(\mathbf{v}|\hat{\omega}) = \max_{\hat{\omega}} \{P(\mathbf{v}|\hat{\omega})\}$$

Bei bekannten stochastischen Eigenschaften des mustererzeugenden Prozesses

$$P(\omega|\mathbf{v}) \quad \text{bzw.} \quad P(\omega)$$

minimiert somit der "ideale" Bayes-Klassifikator die Fehlerwahrscheinlichkeit.

Wesentliche Operation eines mustererkennenden Systemes ist die Berechnung von Unterscheidungsfunktionen im n-dimensionalen Merkmalsraum, welche klassenspezifische Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$$P(\mathbf{v}|\omega_k)$$

und Klassengrenzen so annähern, daß der mittlere Klassifizierungsfehler minimiert wird.

Gemäß Weierstraß'schem Approximationssatz bestimmt zwar lediglich der Grad eines Polynoms die Approximationsgenauigkeit beliebiger stetiger Funktionen, die Anzahl der Terme eines vollständigen Ansatzes mit Grad G und Merkmalszahl N wächst mit

$$M = \binom{N+G}{G}$$

jedoch sehr schnell.

Da bereits eine 16x16 Bildmatrix eines einzigen Videokanales einen 256-dimensionalen Merkmalsraum definiert, dessen (Kronen-)klassenspezifische Wahrscheinlichkeitsverteilung infolge der Variabilität des Musters aus unzusammenhängenden Merkmalsvektoren besteht und durch eine endliche Zahl 255-dimensionaler Hyperebenen nicht linear klassifiziert werden kann, wird die Problematik des Polynomansatzes deutlich.

Hinzu kommt, daß auch eine beliebig große Stichprobenmenge nicht genügend Randbedingungen an die Hand gibt, um unter allen Polynomen eines gewählten Grades dasjenige zu errechnen, welches nach Lösung einer Matrixengleichung nicht nur alle Stützstellen (Stichprobenelemente) richtig approximiert, sondern im Sinne eines Spline auch diejenige Interpolation mit der kleinsten Summe der zweiten Ableitungen, mithin eine bestmögliche Verallgemeinerung in Blick auf die Grundgesamtheit der Kronenmuster durch Minimierung der Sprünge zwischen den Stützstellen gewährleistet.

Ein Multilayer-Perceptron (cf. Fig.40) als spezielles Neuronales Netz ist dem Polynomklassifikator in der Abfolge hier sigmoidal transformierter gewichteter Additionen durch Berechnungsknoten, sog. Perzep-

tronen, in hintereinander vernetzten Schichten sehr ähnlich; die dem Polynomgrad entsprechende Anzahl Neuronen wächst für universelle Approximationsfähigkeit bereits eines 2-schichtigen Netzes hingegen wesentlich langsamer und die Verallgemeinerungsfähigkeit, d.h. der mittlere Klassifikationsfehler der Grundgesamtheit (die Interpolation der durch die Stichprobe definierten Stützstellen) ist kleiner, da die zunehmende Zahl von Randbedingungen bei wachsender Stichprobengröße die Anzahl der möglichen Netzfunktionen im allgemeinen stärker einschränkt als die Zahl stützstellenkompatibler Polynome.

Jedes Perzeptron i einer Schicht l mit $l \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ und $i \in \{0, 1, \dots, I_l-1\}$ bildet für den I_{l+1} -dimensionalen erweiterten Vektor der Ausgaben aller Perzeptronen der vorherigen Schicht (des I_l -dimensionalen erweiterten Eingabevektors für $l=0$)

$$\tilde{y}_{l-1} := \begin{pmatrix} y_{l-1} \\ -1 \end{pmatrix}_{I_{l-1}+1}$$

im **Feed-Forward**-Schritt des Durchgangs n die gewichtete Summe

$$v_{i_l} = \sum_{i_{l-1}=0}^{I_{l-1}-1} w_{i_l i_{l-1}}(n) \tilde{y}_{i_{l-1}}(n)$$

über die Transformation

$$y_{i_l} = \frac{1}{1 + \exp(-v_{i_l}(n))}$$

sigmoidal auf das Intervall $0..1$ ab.

Aufgrund unten dargelegter Eigenschaften wurde vom Autor nach einem Vorschlag von Guyon (1991) eine gestreckte und verschobene Sigmoid

$$y_{i_l} = \frac{2a}{1 + \exp(-bv_{i_l}(n))} - a$$

mit $a=1.716$, $b=0.666$ und symmetrischem Wertebereich verwandt.

Das Produkt

$$-1 w_{i_l i_{l-1}}$$

bildet den Bias oder Schwellwert für das Aktivierungspotential v des Neurons i_l , eines linearen Klassifikators seines Eingangsvektors.

Bei durch die Netzarchitektur gegebener Funktionenklasse wird die berechnete Unterscheidungsfunktion allein durch die Matrizen

$$W_l = \begin{bmatrix} \tilde{w}_{0l}^T \\ \tilde{w}_{1l}^T \\ \vdots \\ \tilde{w}_{I_{l-1}l}^T \end{bmatrix}$$

der erweiterten Gewichtsvektoren jedes Neurons einer Schicht l bestimmt.

Über die partiellen Ableitungen des Klassifikationsfehlers von Ein- Ausgabebeispielen nach den Gewichten

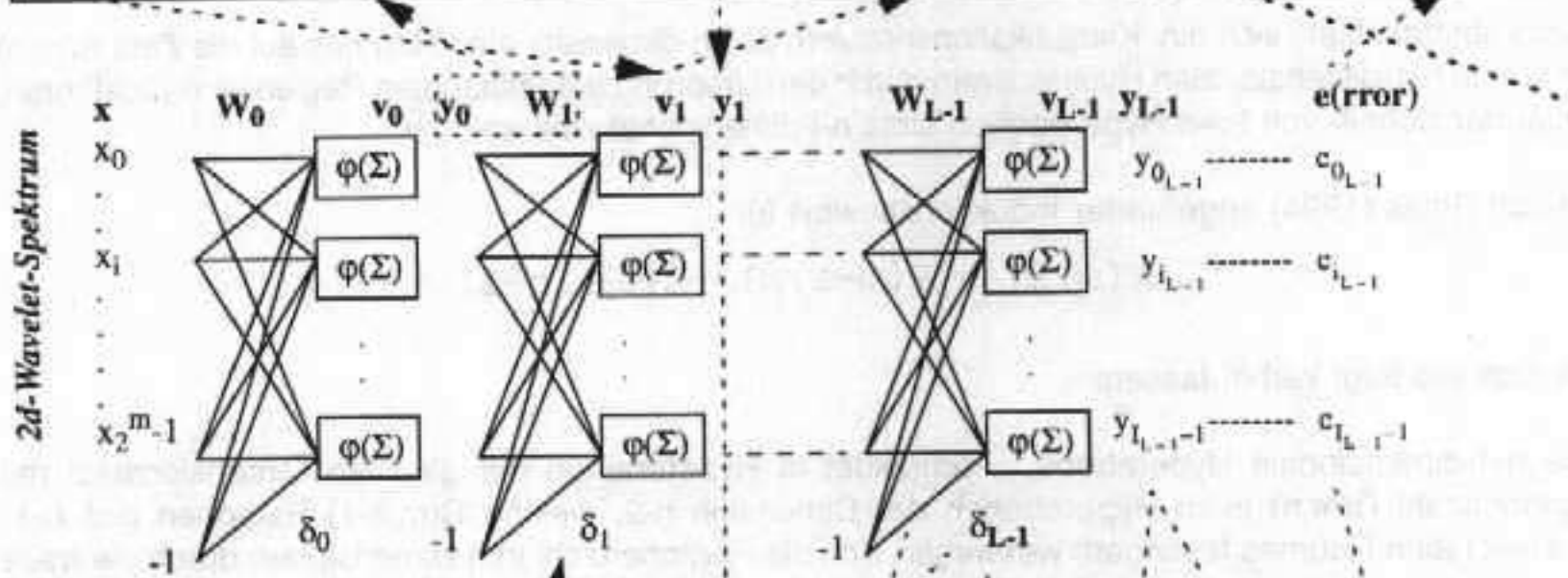
Implementierung eines Neuro-Fuzzy-Multilayer-Perceptron H.Breinlinger

1.) Feed-Forward:

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} y \\ -1 \end{pmatrix} \quad y_i := y_i + a \quad ; \quad a := 1,716, b := 0,666 \dots$$

$$v_i = \sum_{j=0}^{I_{i-1}} w_{ij,i-1}(n) \tilde{y}_{j,i-1}(n) \rightarrow y_i(n) = \frac{2a}{1 + \exp(-b v_i(n))} - a$$

$$E(n) = \frac{\sum_{i=L-1}^{I_{L-1}-1} e_{i,L-1}^2(n)}{2}$$



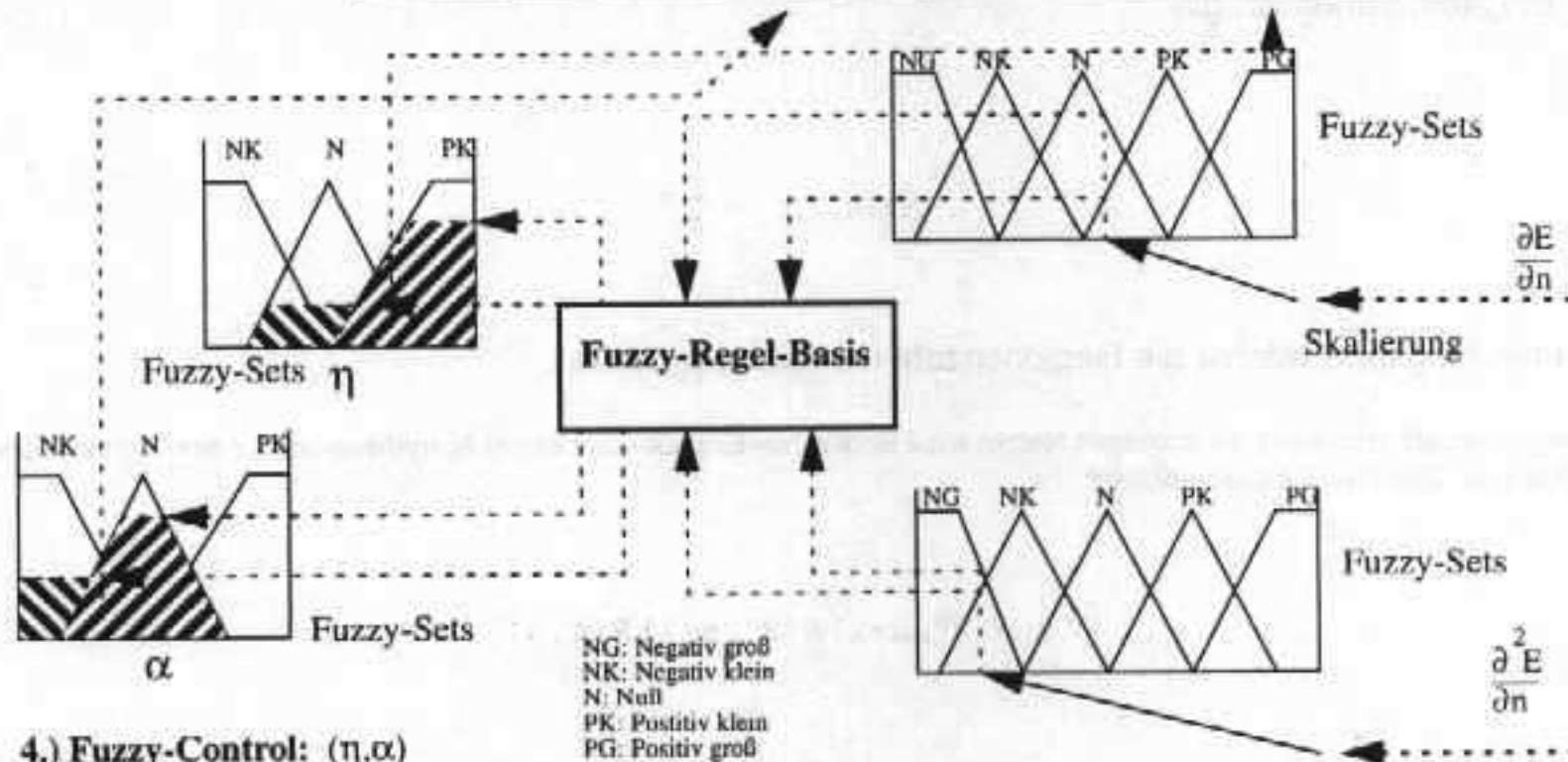
2.) Error-Backpropagation:

$$\delta_i(n) = y_i \left(2a - y_i \right) \frac{b}{2a} \sum_{j=0}^{I_{i+1}-1} \left(\delta_{j,i+1}(n) w_{ji,i+1}(n) \right)$$

$$\delta_{i,L-1}(n) = y_{i,L-1} \left(2a - y_{i,L-1} \right) \frac{b}{2a} e_{i,L-1}(n)$$

3.) Weight-Update:

$$w_{ij,i-1}(n+1) = w_{ij,i-1}(n) + \alpha [w_{ij,i-1}(n) - w_{ij,i-1}(n-1)] + \eta \delta_i(n) y_{j,i-1}(n)$$



4.) Fuzzy-Control: (eta, alpha)

Fig. 40

kann man in einem Gradientenabstiegsverfahren das Netz auf die gewünschte Unterscheidungsfunktion, bzw. Erkennungsleistung hin "trainieren".

Die nichtlineare Transformation der Aktivierungspotentiale in Form einer Sigmoide gewährleistet sowohl Monotonie der Fehlerfunktion als auch Existenz des Nabla-Operators (Vektor der ersten Richtungsableitungen) im Gewichtsraum.

Vor Behandlung der sukzessiven Gewichtskorrektur durch **Error-Backpropagation** soll jedoch kurz auf wichtige Fragen der Problem-Dimensionalität, Netzkapazität und Konvergenz eingegangen werden, wie sie gerade im gewählten Beispiel ausschlaggebend sein können.

Etwas abstrakt lässt sich ein Klassifikationsproblem des n -dimensionalen Raumes auf die Zahl $R(m,n)$ der von m $n-1$ -dimensionalen Hyperebenen durch den Ursprung aufgespannten Regionen zurückführen, wobei der Schnitt von $l \leq n$ Hyperebenen stets $n-l$ -dimensional sein soll.

Ein von Rojas (1994) angeführter Induktionsbeweis für

$$R(m, n) = R(m-1, n) + R(m-1, n-1)$$

läßt sich wie folgt verbal fassen:

Eine $n-1$ -dimensionale Hyperebene H_{m+1} schneidet m Hyperebenen der gleichen Dimensionalität mit Regionenzahl $R(m,n)$ in m Hyperebenen der Dimension $n-2$, welche $R(m,n-1)$ Regionen des $n-1$ -dimensionalen Raumes festlegen, weswegen sich die Regionenzahl in n Dimensionen durch die neue Hyperebene auf

$$R(m+1, n) = R(m, n) + R(m, n-1)$$

erhöht.

Allgemein erhält man so durch m Eingabeschicht-Neuronen eines n -dimensionalen Eingabevektors

$$R(m, n) = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m-1}{i}$$

Klassifikationsregionen.

Solange $m \leq n$, d.h. die Zahl der Perzeptronen-spezifischen Hyperebenen kleiner als die Dimensionalität des Eingaberaumes ist, gilt

$$R(m, n) = 2^m$$

Für $m > n$ hingegen wächst die Regionenzahl nurmehr polynomiell.

Die Regionenzahl etwa eines 2-schichtigen Netzes mit 2 Bool'schen Eingabe- und einem Ausgabeneuron für eine n -dimensionale Eingabe und $2(n+1)+3$ Gewichte beträgt

$$N \leq R(2^n, n+1) R(2^n, n+1) R(4, 3)$$

Es muß nun ein Netz entworfen werden, welches einen für die Lösung der Approximationsaufgabe hinreichenden Polynomgrad und somit genügende Regionkapazität aufweist, dessen Approximationsfunktion jedoch in der Grundgesamtheit hinsichtlich Stützstelleninterpolation mit einer zu bestimmenden Wahrscheinlichkeit eine obere Schranke des mittleren Fehlerquadrates aufweist, d.h., die Verallgemeinerungsgüte des Netzpolynoms ist zu schätzen.

Im Sinne der Regionkapazität ist die **Vapnik-Chervonenkis-Dimension** einer Funktionenklasse die Maximalzahl n -dimensionaler Eingaben, welche

$$R(m, n) = 2^m$$

erfüllt und nach Vapnik (1982) gilt für die Unterschreitungs-Wahrscheinlichkeit der Maximal-Differenz von Fehlerwahrscheinlichkeit $P(\mathbf{w})$ in der Grundgesamtheit und Trainingsfehler $e(\mathbf{w})$ als Funktion der Netzgewichte mit VC-Dimension h und Trainingsset N

$$\alpha := P\left\{\sup_{\mathbf{w}} |P(\mathbf{w}) - e(\mathbf{w})| \geq \epsilon\right\} = \left(\frac{2eN}{h}\right)^h \exp(-\epsilon^2 N)$$

, woraus man die Begrenztheit der VC-Dimension als notwendige und hinreichende Bedingung für die Netzkonzvergenz in der Grundgesamtheit ableitet.

Bezogen auf die Eingangsproblematik der Digitalen Bildverarbeitung entspricht dies der Frage, wie komplex ein Netz sein muß, um in einem $2^l \times 2^l + 1$ -dimensionalen Trainings-Merkmalraum¹⁴ die Entscheidungsfunktion "Baumkrone" zu entwerfen, gleichzeitig jedoch eine ϵ -Konvergenz des Interpolationsfehlers für alle denkbaren Kronenmuster der Grundgesamtheit während der Fehlerminimierung mittels Error-Backpropagation sicherzustellen.

Wegen

$$P\{P(\mathbf{w}) < e(\mathbf{w}) + \epsilon\} = 1 - \alpha$$

erhält man mit

$$\epsilon_0(N, h, \alpha) := \left\{ \epsilon \mid \alpha = \left(\frac{2eN}{h}\right)^h \exp(-\epsilon^2 N) \right\}$$

das Konfidenzintervall

$$\epsilon_0(N, h, \alpha) = \sqrt{\frac{h}{N} \left[\ln\left(\frac{2N}{h}\right) + 1 \right] - \frac{1}{N} \ln \alpha}$$

für die Abweichung des größtmöglichen Klassifikationsfehlers $P(\mathbf{w})=0.5$ in der Grundgesamtheit gegenüber dem Trainingsfehler als Funktion von VC-Dimension und Größe des Trainingssets.

Bei den in der Praxis wesentlich kleineren mittleren Wahrscheinlichkeiten der Fehlklassifikation gibt Haykin (1994 nach Vapnik 1992) ein neues Konfidenzintervall

$$\epsilon_1(N, h, \alpha, e) = 2\epsilon_0^2(N, h, \alpha) \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v(\mathbf{w})}{\epsilon_0^2(N, h, \alpha)}} \right)$$

¹⁴Wavelet-Teilspektrum + Schwellwert (Bias)

für die Irrtumswahrscheinlichkeit der Klassifikation

$$P(\mathbf{w}) < e(\mathbf{w}) + \epsilon_1(N, h, \alpha, e)$$

in Abhängigkeit des erreichten Trainingsfehlers an, welches für gute Stützstellenapproximation gegen

$$\epsilon_1(N, h, \alpha, e) \approx 4\epsilon_0^2(N, h, \alpha)$$

konvergiert.

Da nach Cybenko (1989) für den Raum der auf dem p-dimensionalen Einheitswürfel I_p kontinuierlichen Funktionen $C(I_p)$ jeder Repräsentant $f \in C(I_p)$ mit obiger Sigmoid $\varphi(\cdot)$, $x_0 = -1$ und geeigneten Gewichten $\mathbf{w}$ über die Funktion eines 2-schichtigen Netzes¹⁵

$$F(x_0, x_1, \dots, x_p) = \sum_{i=0}^{M_2} w_i^{(2)} \varphi \left(\sum_{j=0}^{M_1} w_{ij}^{(1)} x_j \right)$$

zu

$$|F(x_0, x_1, \dots, x_p) - \hat{F}(x_0, x_1, \dots, x_p)| < \epsilon$$

angenähert werden kann, stellt bereits ein 2-schichtiges Netzwerk einen **universellen Approximator** dar.

In der aktuellen Implementierung wurde jedoch wie praxisüblich wegen der gedachten schichtweisen Abfolge lokaler und globaler Informationsextraktion des Merkmalsvektors ein 3-schichtiges Netzwerk als Partialterm des allgemeinen Netz-Modells (hier für ein einzelnes Ausgabe-Neuron)

$$F_{i_{L-1}}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \varphi \left(\sum_{i_{L-2}=0}^{I_{L-2}} w_{i_{L-1}i_{L-2}} \varphi \left(\sum_{i_{L-3}=0}^{I_{L-3}} w_{i_{L-2}i_{L-3}} \varphi \left(\dots \sum_{i_{i-1}=0}^{I_{i-1}} w_{i_{i-1}i_{i-1}} \varphi \left(\dots \sum_{i_x=0}^{I_x} w_{i_0i_x} x_{i_x} \right) \right) \right) \right)$$

mit um -1 erweiterten Eingabevektoren und den Schwellwerten

$$w_{i_{L-1}i_{L-1}} \quad \text{bzw.} \quad w_{i_{L-1}i_x}$$

verwandt.

Sei d die Soll-Ausgabe der zentralen Operation

$$v = \sum_{i=0}^I w_i x_i$$

mit Fehler

$$e = \frac{1}{2} (d - v)^2$$

¹⁵ 1 verborgene und 1 Ausgabeschicht

$$e = d - v$$

und

$$J = \frac{1}{2} E[e^2]$$

die Definition des Erwartungswertes, so führt dessen Minimierung über die Umformung

$$J = \frac{1}{2} E[e^2] = E \left[\sum_{i_1=0}^I w_{i_1} x_{i_1} d \right] + \frac{1}{2} E \left[\sum_{i_1=0}^I \sum_{i_2=0}^I w_{i_1} w_{i_2} x_{i_1} x_{i_2} \right] =$$

$$\frac{1}{2} E[e^2] - \sum_{i_1=0}^I w_{i_1} E[x_{i_1} d] + \frac{1}{2} \sum_{i_1=0}^I \sum_{i_2=0}^I w_{i_1} w_{i_2} E[x_{i_1} x_{i_2}]$$

, welche das Fehler-"Gebirge" mit globalem Minimum als Funktion der Gewichte wiedergibt, auf den aus der Nachrichtentechnik bekannten **Wiener-Filter** und man kann über die ersten Richtungsableitungen

$$\nabla_{w_{i_1}} J = \frac{dJ}{dw_{i_1}} = -E[x_{i_1} d] + \sum_{i_2=0}^I w_{i_2} E[x_{i_1} x_{i_2}]$$

das **Wiener-Hopf-Gleichungssystem**

$$\sum_{i_2=0}^I w_{i_2} E[x_{i_1} x_{i_2}] = E[x_{i_1} d] \quad ; \quad i_1 = 0 \dots I$$

nach den Gewichten auflösen.

Im Falle vielfach vernetzter Elementar-Knoten des Multilayer-Perceptron nähert man eine Lösung durch variierende Gradientenabstiegsverfahren im Gewichtsraum mittels Fehler-Rückrechnung (**Error-Backpropagation**) an.

Wegen der hochdimensionalen Fehler-Hyperebene des Fernerkundungsbeispiels wurde zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit die Parametereinstellung über **Fuzzy-Control**(cf. unten) geregelt.

Die sigmoidale Kennlinie

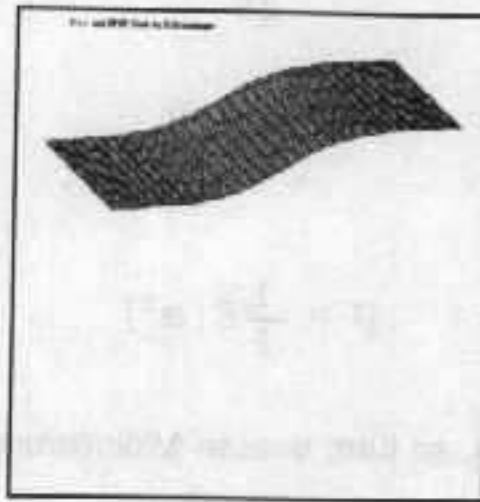
$$y_i = \frac{1}{1 + \exp(-v_i(n))}$$

bewirkt eine stetige Differenzierbarkeit der nun sprungstellenfreien Fehler-Hyperfläche.

Aufgrund besseren Lernverhaltens bei asymmetrischer Kennlinie und höherem Gradienten im Bereich der Netz-Still-Ausgabe (1,-1) wurde vom Autor nach einem Vorschlag von Guyon (1991) die modifizierte Sigmoide

$$y_i = \frac{2a}{1 + \exp(-bv_i(n))} - a$$

mit $a=1.716$ und $b=0.666$ (cf. Fig. 41) verwandt.

Fig. 41: $2a/(\exp(-bv(n))) - a$

Seien

$$\mathbf{d}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Soll-Ausgabevektoren der Klassen "Krone" und "Nicht-Krone" eines L-schichtigen Netzes¹⁶ mit

$$\begin{array}{ll}
 I_1 & ; \text{Neuronenzahl der Schicht 1} \\
 \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{I_1-1} \\ -1 \end{pmatrix}_x & ; \text{Wavelet-Eingabe} \\
 \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{I_1-1} \\ -1 \end{pmatrix}_{y_1} & ; (\text{erweiterte}) \text{ Ausgabe-Werte} \\
 \begin{pmatrix} e_0 \\ e_{I_1-1} \end{pmatrix}_e & ; \text{Netzfehler} \\
 \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{I_1-1} \end{pmatrix}_{v_1} & ; \text{Aktivierungspotentiale} \\
 \begin{pmatrix} \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_{I_1-1} \end{pmatrix}_{\delta_1} & ; \text{lokale Gradienten} \\
 \begin{pmatrix} d_0 \\ d_{I_1-1} \end{pmatrix}_d & ; \text{Soll-Ausgabe}
 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} w_{0,0I_1-1} & \dots & w_{0,I_1-1I_1-1} & -1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ w_{I_1-1,0I_1-1} & \dots & w_{I_1-1,I_1-1I_1-1} & -1 \end{pmatrix}_I = \begin{pmatrix} w_0^{(1)\tau} \\ w_1^{(1)\tau} \\ \vdots \\ w_{I_1-1}^{(1)\tau} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_1^1 = \begin{pmatrix} w_{I_1-1,0I_1-1} \\ \vdots \\ w_{I_1-1,I_1-1I_1-1} \\ -1 \end{pmatrix}$$

so ergeben sich für eine Fehlerfunktion

¹⁶L-1 verborgene und 1 Ausgabe-Schicht

$$E(n) = \frac{\sum_{i_{L-1}=0}^{I_{L-1}-1} e_{i_{L-1}}^2(n)}{2} \quad ; \quad \mathbf{e} = \mathbf{y}_{L-1} - \mathbf{d}$$

nach Ableitung der modifizierten Sigmoide

$$\begin{aligned} \varphi(v_{i_1})' &= \frac{2ab e^{-bv_{i_1}}}{(1+e^{-bv_{i_1}})^2} \Big|_{\check{y}_{i_1} := y_{i_1} + a} \\ &= \check{y}_{i_1} (2a - \check{y}_{i_1}) \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

über die Kettenregel der Differentialrechnung die lokalen Gradienten der Ausgabeneuronen

$$\delta_{i_{L-1}}(n) = -\frac{dE(n)}{dv_{i_{L-1}}} = \check{y}_{i_{L-1}} (2a - \check{y}_{i_{L-1}}) \frac{b}{2a} e_{i_{L-1}}(n)$$

und der Neuronen der verborgenen Schicht(en)

$$\begin{aligned} \delta_{i_1}(n) &= -\frac{dE(n)}{dv_{i_1}} = \\ &= \check{y}_{i_1} (2a - \check{y}_{i_1}) \frac{b}{2a} \sum_{i_{l+1}=0}^{I_{l+1}-1} \delta_{i_{l+1}}(n) w_{i_1 i_{l+1}}(n) \quad ; \quad l < L-1 \end{aligned}$$

Die Umformung nach

$$\check{y}_{i_1} := y_{i_1} + a$$

begünstigt die Rechnerimplementierung wegen der nach "Feed-Forward" bereits bekannten Größe y .

Für die Klassifikation des jeweils nachfolgenden Trainingsbeispiels errechnen sich mit

$$\frac{dv_{i_1}}{dw_{i_1 i_{l+1}}} = y_{i_{l+1}}$$

die um das η -fache ihres negativen Gradienten korrigierten Gewichte

$$w_{i_1 i_{l+1}}(n+1) = w_{i_1 i_{l+1}}(n) + \alpha [w_{i_1 i_{l+1}}(n) - w_{i_1 i_{l+1}}(n-1)] + \eta \delta_{i_1}(n) y_{i_{l+1}}(n)$$

über einen Momentumterm

$$\alpha [w_{i_1 i_{l+1}}(n) - w_{i_1 i_{l+1}}(n-1)]$$

, welcher Oszillationen diametraler Gewichtsänderungen in aufeinanderfolgenden Schritten dämpft und

die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht.

Stete Permutation der Trainingsdaten begünstigt die Vermeidung lokaler Minima; Lernrate η , bzw. Momentumfaktor α beeinflussen neben problemangepasster Stichprobengröße und Netzarchitektur entscheidend Konvergenzgeschwindigkeit und verbleibenden Trainingsfehler.

Ein Netz höheren Polynomgrades, mithin einer größeren Anzahl verborgener Neuronen, begünstigt einerseits die Approximationsgenauigkeit der Netzfunktion im Bereich der Stützstellen, weist andererseits jedoch ein größeres Interpolations-, bzw. Verallgemeinerungsrisiko bezüglich neuer Daten auf, welches als mittleres Integral der Abweichungsquadrate zwischen tatsächlicher Unterscheidungsfunktion und ihrem Schätzer, der Netzfunktion, aufgefaßt werden kann.

Barron (1992 in Haykin 1994) formuliert dieses Abweichungsrisiko für 2-schichtige Netze mit Stichprobengröße N , M Neuronen der verborgenen und P Neuronen der Eingabeschicht, sowie dem Mittelwert des Fourierspektrums der Unterscheidungsfunktion als Regularitätsmaß C_f , über die Summe der bezüglich M gegenläufigen Fehlerterme

$$R = O\left(\frac{C_f^2}{M}\right) + O\left(\frac{MP}{N} \log N\right)$$

, welche die für universelle Approximationseigenschaften nötige Stichprobengröße aufgrund des gleichsinnig zunehmenden Interpolationsfehlers begrenzt.

Vernachlässigt man den logarithmischen Term, so bewegt sich die für eine angestrebte Obergrenze ϵ des Approximationsfehler ausreichende Trainingsdatenmenge im Bereich

$$N > \frac{MP}{\epsilon}$$

. Die Klassifikation der 6.25%-Wavelet-Sub-Matrix eines 16x16-Luminanzausschnittes mit einer Schichtenfolge

$$16 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$$

über

$$W = \begin{pmatrix} (16+1) \times 6 & + \\ (6+1) \times 4 & + \\ (4+1) \times 2 & \end{pmatrix} = 140$$

freie Parameter (Blaß beachten!) mit 10%-igem Approximationsfehler und vollständiger Vernetzung erfordert demnach eine maximal notwendige Trainingsdatenmenge von ca. 1.500 Beispielen, für welche bei überlappender Matrixanordnung ein PAL-Fernsehbild ausreicht.

Unter der Minimierungsbedingung

$$\left(\frac{C_f^2}{M}\right) = -\frac{MP}{N} \log N \rightarrow M \approx C_f \sqrt{\frac{N}{P \log N}}$$

ergibt sich durch Substitution in obiger Summe für die Schranke des Fehlerintegrals

$$d\left(c_f \sqrt{\frac{P \log N}{N}}\right)$$

mit dem Konvergenzfaktor

$$\sqrt{\frac{1}{N}}$$

Im Vergleich hierzu (Duda und Hart 1973) fällt die maximale Abweichungssumme k-mal stetig ableitbarer Approximationsfunktionen in Abhängigkeit der Dimensionalität D nur mit

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2k}{2k+D}}$$

weswegen sich die Unabhängigkeit des Approximationsrisikos von der Problem-Dimension, mithin die Wahrscheinlichkeit der Generalisierungseignung als wesentlicher Vorteil gegenüber klassischen Polynomansätzen darstellt.

Zur Beschleunigung der Konvergenz für die Texturerkennung in Schwarz-Weiß-Videobildern wurden Lern- und Momentumrate als kritische Parameter mit je einem **Mamdani-(Fuzzy)-Regler** (cf. Nauck, Klawonn, Kruse 1994) in Abhängigkeit der ersten und zweiten Ableitung des Netzfehlers nach jedem Trainingsbeispiel mit den Fuzzy-Sets aus Fig. 40 angepaßt.

Ein Fuzzy-Set ist eine Abbildungsvorschrift, welche einer intervallskalierten Meßgröße bezüglich einer "verbalen Aussage" einen "unscharfen Wahrheitsgrad" B_{eff} ($0 \leq B \leq 1$) zuweist.

So besitzt die k-te Ableitung des Netzfehlers im nicht trivialen Fall für 2 "benachbarte" der Aussagen "negativ groß, negativ klein, Null, positiv klein, positiv groß" mit paarweise überlappenden Supports, deren Zuordnungsvorschriften sich stets zu 1 addieren, jeweils Teil-Gültigkeit.

Formuliert man für die Stellgrößen $\Delta\eta$ und $\Delta\alpha$ je eine Regel-Matrix (nach einer Anregung v 0 n)

Haykin 1994)

$$\begin{bmatrix} E' & NG & NK & N & PK & PG \\ E'' & & & & & \\ NG & NK & NK & NK & NK & NK \\ NK & NK & N & PK & N & NK \\ N & N & PK & PK & PK & N \\ PK & NK & N & PK & N & NK \\ PG & NK & NK & NK & NK & NK \end{bmatrix}_{\eta} \quad \begin{bmatrix} E' & NG & NK & N & PK & PG \\ E'' & & & & & \\ NG & NK & NK & N & N & N \\ NK & NK & N & N & N & N \\ N & N & PK & PK & PK & N \\ PK & N & N & N & N & NK \\ PG & N & N & N & NK & NK \end{bmatrix}_{\alpha}$$

, nach welcher aus den qualitativen Aussagen über die ersten beiden Ableitungen "Wenn-Dann"-Entscheidungen der Art

- "Wenn E' "negativ klein" und E'' "Null" dann $\Delta\eta :=$ "positiv klein"
- "Wenn E' "negativ groß" und E'' "Null" dann $\Delta\eta :=$ "null"

hervorgehen, ergeben sich als resultierende Stellgrößen aus den Inferenz-Fuzzy-Sets für $\Delta\eta$ und $\Delta\alpha$ die Schwerpunkte aller Flächen unter den jeweiligen Regelerfüllungsgraden (cf. Fig. 40).

Infolge der "unscharfen" Anpassungssteuerung unter Vermeidung von Oszillationen und Sprüngen konnten die mittlere Trainingszeit für Klassifikationen wie in Fig. 50 deutlich (mehrere Stunden), der verbleibende Fehler jedoch nur unwesentlich gesenkt werden.

Hinsichtlich Trainingszeit, Restfehler, Verallgemeinerungsfähigkeit und Stichprobengröße erwies sich für die Klassifikation des 6.25%-Restspektrums von 16x16-Fenstern ein 3-schichtiges Netz mit einer Neuronenfolge

$$16 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2$$

bei ca. 1600 Beispielvektoren in etwa 6000 Durchgängen als bestgeeignet.

Aufgrund der komplexen Fehlerfunktion im 140-dimensionalen Gewichtsraum (cf. oben) und einer anhand isolierter Ausschnitte auch für den menschlichen Betrachter oft nicht existierenden Abbildung des Merkmalsvektors auf die Klassen

$$\text{Wald} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Nicht-Wald} := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

, wurden mit $\eta=0.00001$ und $\alpha=0.00001$ sehr kleine Initialisierungen gewählt, deren Fuzzy-Regelung Gradientenabstieg und Überwindung von Plateaus schwacher Steigung beschleunigte, den mittleren Fehler

$$E_{av} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \sum_{i_{L-1}=0}^{I_{L-1}} e_{i_{L-1}}^2(n)$$

jedoch nicht von ca. 1.1... unter 0.26 senken konnte.

Der Abbildungsbereich der asymmetrischen Sigmoiden wurde wie dargelegt wegen des höheren Gradienten im Bereich der Sollgrößen 1 und -1 auf das Intervall $[-1.716, 1.716]$ gestreckt, die Netzgewichte über die Zahl F_i der Eingangsverbindungen des zugehörigen Neurons mit Zufallsgrößen im Bereich

$$\left(\frac{-2.4}{F_{i_1}}, \frac{2.4}{F_{i_2}} \right)$$

initialisiert.

Wie dargelegt spiegelt der Wert vermutlich kein lokales Minimum, sondern eine in Anbetracht der isolierten Texturfragmente mit umgebungsabhängiger Bedeutung grundsätzlich nicht verbesserbare Trennfunktion des Merkmalsraumes wieder.

Fig. 42-47 geben einen Eindruck von der Texturvariabilität der um 93.75% gefilterten rücktransformierten Kronen innerhalb einer 16x16-Matrix, wie sie dem $(4 \times 4 + 1)$ -Merkmalsvektor des Frequenzraumes entsprechen, für welchen das Multilayer-Perceptron die Klassifikation durchführt.

Die "Digitalen Geländemodelle" entsprechen hierbei den "theoretischen" Grauwertverläufen eines aus den Merkmalsvektoren rückgerechneten Luminanz-Kanales in Fig. 49.

Zwecks Übersichtlichkeit wurden in Fig. 50 lediglich benachbarte Texturen einer Evaluierungsmenge - klassifiziert und alle Matrizen mit "Wald-Zuordnung" diagonal gestrichen.

Deutlich zu erkennen ist die an der Grauwertdynamik innerhalb der Fensterausschnitte orientierte Entscheidungsfunktion, welche zum Bildrand, in Jungdurchforstung und Jugendpflege, aber auch auf kontrastieren-

den Freiflächen ähnlich dem menschlichen Beobachter bei isolierter Betrachtung sehr kleiner Geländeausschnitte unzuverlässig wird, da sich eine Klassenzugehörigkeit kleinräumiger Texturen vielfach nur mit Kenntnis der nächstgrößeren "Fraktale" bestimmen läßt.

Um so bemerkenswerter ist angesichts der zwar sorgfältig ausgewählten, in einzelnen Fällen jedoch bisweilen widersprüchlichen Trainingsdaten mit hohem Polynomgrad der bestmöglichen Entscheidungsfunktion die zuverlässige Konvergenz des Algorithmus im Bereich trennbarer Regionen.



Variabilität der Grauwertprofile von Kronen innerhalb um 93.75% komprimierter 16x16-Matrizen

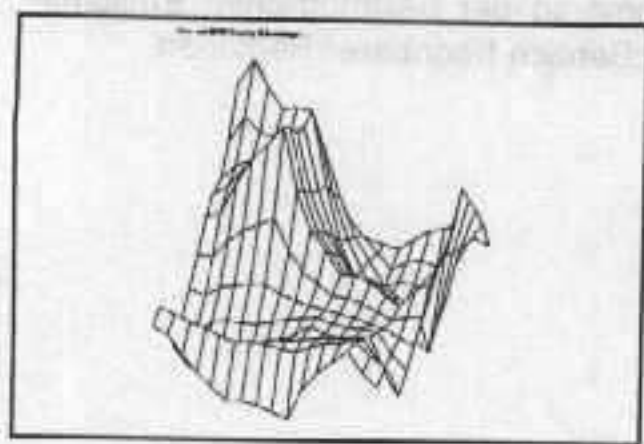


Fig. 42

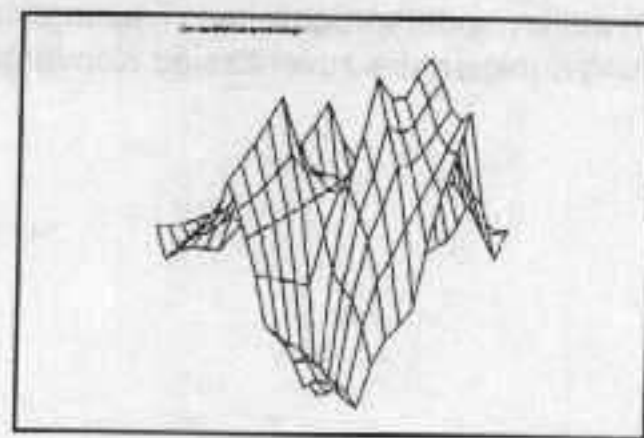


Fig. 43

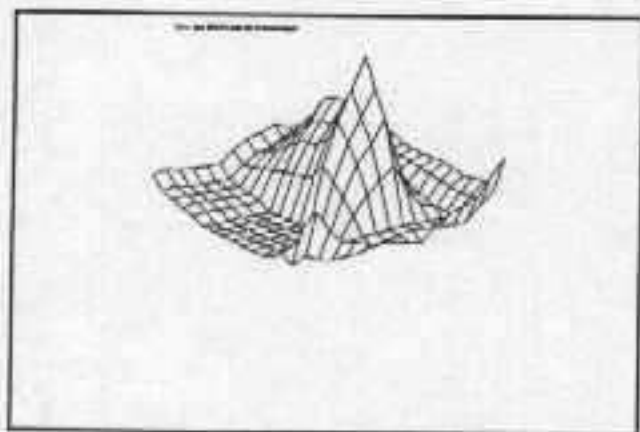


Fig. 44

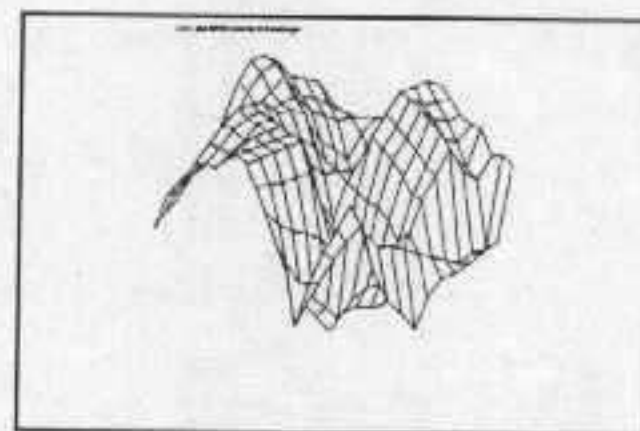


Fig. 45

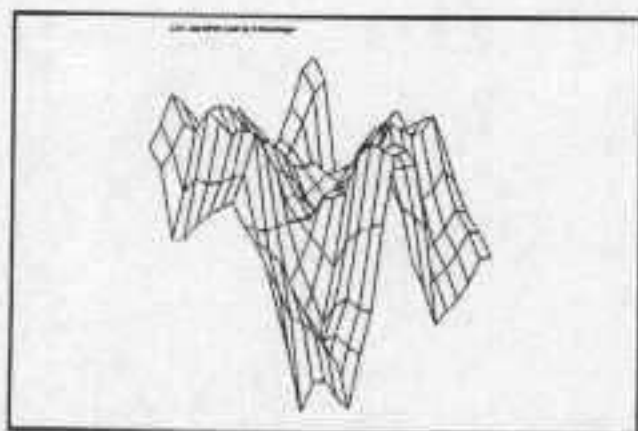


Fig. 46

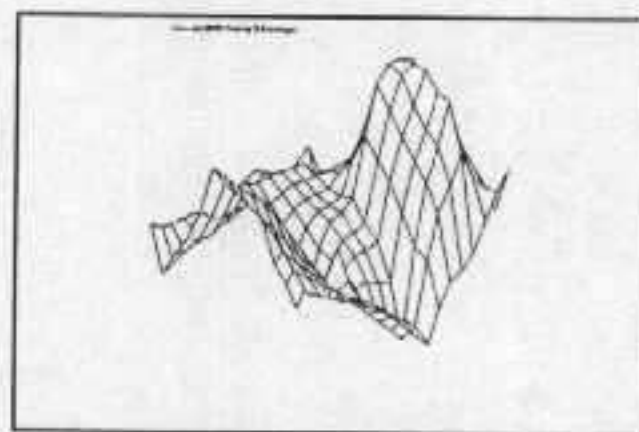


Fig. 47

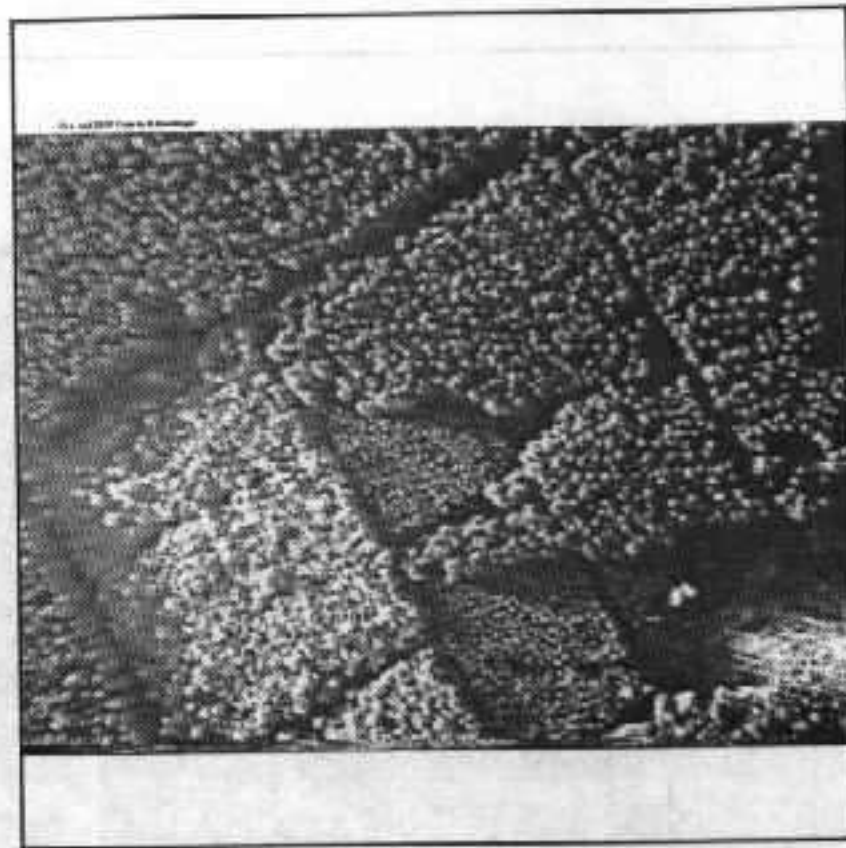


Fig. 48: Luminanz-Kanal S-VHS-Luftbild

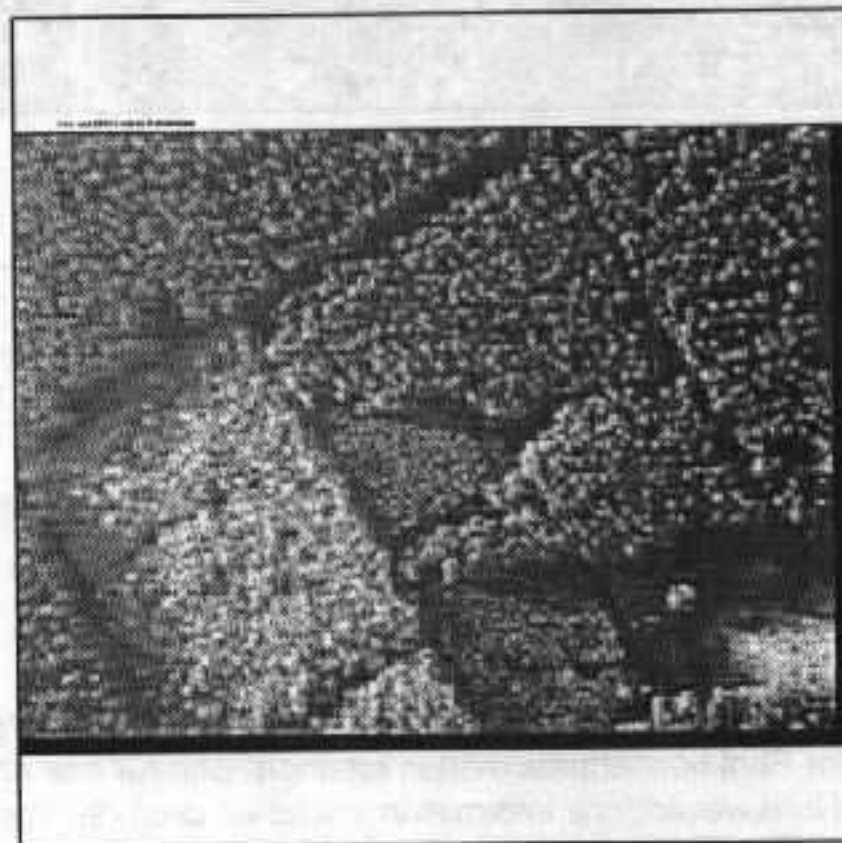


Fig. 49: Mosaik der rücktransformierten Merkmalsvektoren aus den um 93.75%- reduzierten Wavelet-Spektren benachbarter 16x16-Matrizen

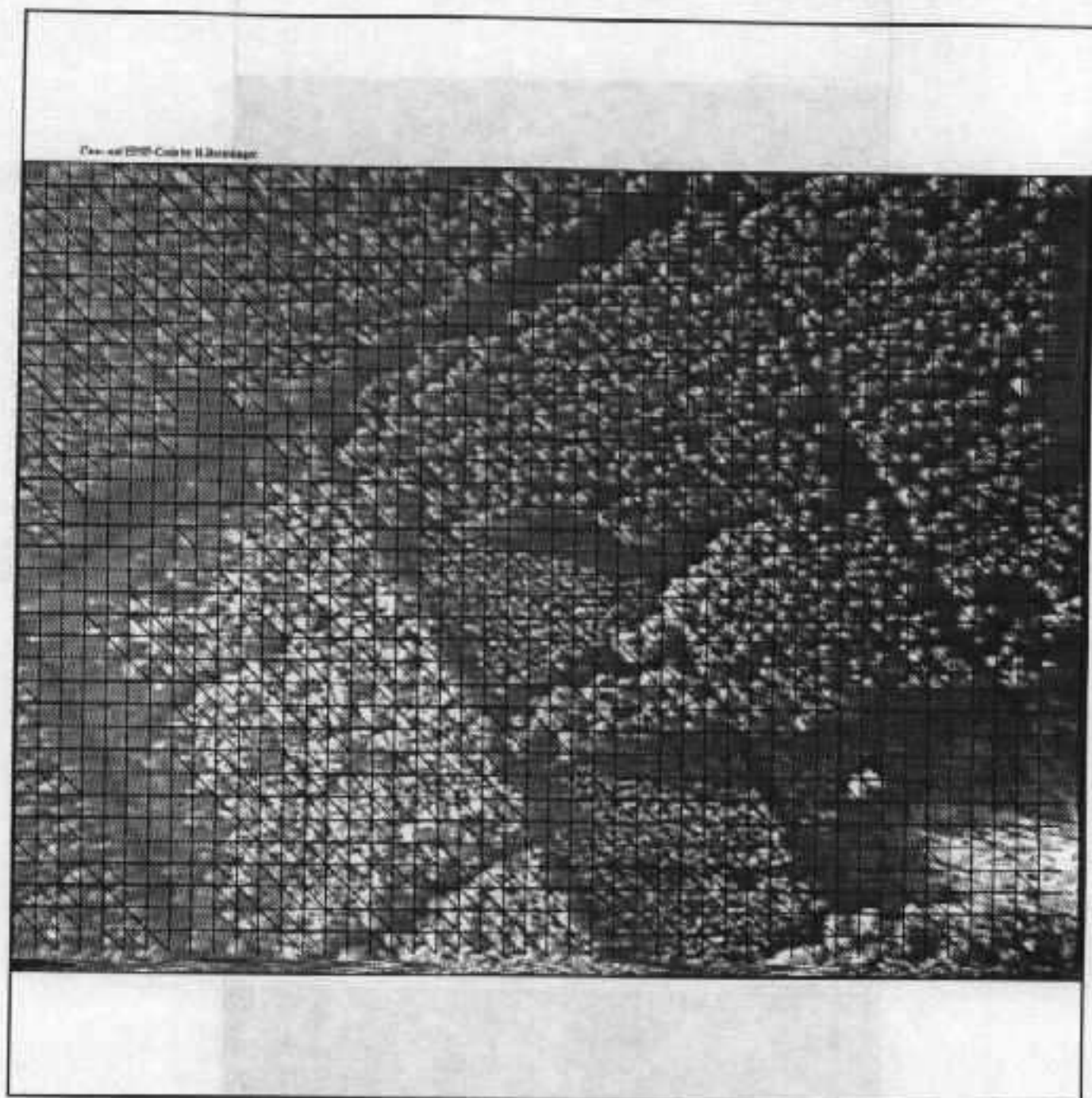


Fig. 50: Von einem fuzzy-geregelten Multilayer-Perceptron klassifizierte Evaluierungsmenge
(zwecks Übersichtlichkeit nicht überlappend berechnet)
Matrizen der Kronenmenge sind schwarz gestrichen (cf. Text)

Die Anwendung aus der Fernerkundung wurde wegen der naheliegenden Verbindung von Wavelet-Kompression und neuronaler Funktionsapproximation exemplarisch für alle Anwendungen gewählt, in denen große Datensätze auf ihre wesentliche Information verdichtet und/oder in einen Entscheidungsraum abgebildet werden müssen, für welchen klassische Verfahren wie Polynomansatz, Cluster- oder Diskriminanzanalyse ungeeignet sein können.

Diskussion

Mit der Anfang des Jahrhunderts entwickelten Modellvorstellung des Gehirns als Verbund aus Neuronen, deren Erregungsleitung über die Wichtung synaptischer Aktionspotentiale komplexe Verhaltensmuster infolge massiver Parallelisierung erklärte, setzte über die ersten künstlichen Perzeptronen als adaptive Klassifikatoren und ihr konnektionistisches Formalmodell von *McCulloch und Pitts* in den 50er Jahren ein Boom an Forschungen nach einfachen Lernalgorithmen und Konvergenzbeweisen ein, deren Machbarkeits-Glaube durch *Minsky und Paperts* klassische Untersuchung exponentiellen Lernverhaltens einschichtiger Netze "Perceptrons: An Introduction to Computational Geometry" 1969 in Frage gestellt wurde und das Interesse an Neuronalen Netzen in weiten Kreisen zum Erliegen brachte.

Dieser Einbruch durch Übertragung Euler'scher Betrachtungen zu Raumtopologien auf die Lernbarkeit von Mustern und das Fehlen eines Lernalgorithmus für mehrschichtige Netze wurde mit Popularisierung des "Error-Backpropagation-Verfahrens" für Multilayer-Perceptrons durch *Rumelhart und McClelland*, sowie Entdeckung der *Vapnik-Chervonenkis*-Dimension als Maß der Separabilität von Merkmalsräumen durch Polynome ebenso überwunden wie die Erfolge selbstorganisierender Netze bei Hauptkomponenten- und Clusteranalysen neben der Revolutionierung großer Probleme der linearen Optimierung mit dem Algorithmus von *Karmarkar* 1984 eine bis heute anhaltende Renaissance der Neuro-Informatik bewirkten.

Viel diskutierte Aspekte neuronaler Netze sind Lernzeit, Netztopologie, Vermeidung lokaler Minima und Sicherstellung der Konvergenz gegen die Entscheidungsfunktion der Grundgesamtheit.

Die Literatur (Schürmann 1994, Rojas 1994, Haykin 1994, Kreßel 1994) nennt eine Reihe von Abwandlungen zur Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit wie "RPROP" mit

$$\Delta w_{i_1 i_{1-1}} = \beta_{i_1 i_{1-1}}(n) \operatorname{signum}\left(-\frac{dE(n)}{d_{i_1 i_{1-1}}}\right)$$

Quickprop, *Conjugate Gradient*, *Quasi-Newton* und *Levenberg-Marquardt*, welche jedoch in der Hauptsache nicht das Lernverhalten des "Pattern Mode"¹⁷ sondern des "Batch-Mode"¹⁸ verbessern.

Abgesehen von einem modifizierten Error-Backpropagation-Algorithmus, dessen Gewichtsänderung sich mit Stichprobengröße P und mittlerer partieller Ableitung des Netzfehlers (cf. oben)

$$\frac{dE_{av}(n)}{dw_{i_1 i_{1-1}}} = -\sum_{p=0}^{P-1} \delta^{(p)}_{i_1}(n) y^{(p)}_{i_{1-1}}(n)$$

über die Rekursion

¹⁷ Gewichtskorrektur nach jeder Klassifikation eines Beispiels (Pattern) der Trainingsmenge

¹⁸ Gewichtskorrektur über kumulativen (mittleren) Gradienten des Trainingsensembles

$$S_{i,j,i-1} = (1-\xi) D_{i,j,i-1}(n-1) + \xi S_{i,j,i-1}(n-1) \quad ; \xi \text{ konstant}, D_{i,j,i-1}(n) = \frac{dE(n)}{dw_{i,j,i-1}}$$

für **variable** gewichtsabhängige Lernraten¹⁹

$$\Delta \eta_{i,j,i-1}(n+1) = \begin{cases} \tau & ; S_{i,j,i-1}(n-1) D_{i,j,i-1}(n) > 0 \\ -\gamma \eta_{i,j,i-1}(n) & ; S_{i,j,i-1}(n-1) D_{i,j,i-1}(n) < 0 \\ 0 & ; \text{ELSE} \end{cases} \quad ; \tau, \gamma \text{ konstant}$$

zu

$$w_{i,j,i-1}(n+1) = w_{i,j,i-1}(n) + \alpha (w_{i,j,i-1}(n) - w_{i,j,i-1}(n-1)) + \eta_{i,j,i-1}(n+1) \sum_{p=0}^{p-1} \delta^{(p)}_{i,j}(n) y^{(p)}_{i-1}(n)$$

ergibt und durch Verwendung eines Mittelwertes den mit individuellen Lernraten erhöhten Speicherbedarf ausgleicht, sind Lernzeiten und Restfehler nach Untersuchungen von Haykin (1994) im "Pattern-Mode" des Standard-Backpropagation-Algorithmus jedoch oft günstiger.

In der vorliegenden Arbeit konnte durch Fuzzy-Schrittweitensteuerung die Konvergenzgeschwindigkeit zwar erhöht werden, die Regler-Einstellung erwies sich jedoch als ausgesprochen diffizil und konnte erst nach Skalierung der ersten und zweiten Richtungsableitungen des Netzfehlers mit den Ableitungsvarianzen des jeweils vorherigen Ensemble-Durchganges hinreichend gelöst werden (cf. Fig. 40).

Die Vorteile der Fuzzy-Regelung liegen neben ihrer Fehlertoleranz infolge "weicher" Entscheidungen vor allem in einer Verringerung der notwendigen Zahl an Regeln, welche für kontinuierliche Werte vielfach höher liegt.

Ein geringerer mittlerer Trainings- oder Evaluierungsfehler (77% bzw. 73% richtige Klassifikation) als ohne Fuzzy-Regelung war hierdurch aus den im vorigen Abschnitt genannten Gründen hingegen nicht zu erreichen.

Lokale Minima konnten empirisch ausgeschlossen werden, da bei stochastischen Gewichtsinitialisierungen in fast allen Trainingsläufen ein gleiches Fehlerniveau erreicht wurde.

Henkel und Kreßel (1992) weisen für das Problem der Ziffernerkennung auf die in ihren Untersuchungen gegenüber dem kumulativen Ansatz überlegene Klassifikationsleistung des "Pattern Mode" ohne Momentumterm hin und erhielten für die Lernrate im Gegensatz zu dem vom Autor untersuchten Problem der Texturerkennung eine relativ große indifferente Einstellbreite ($0.04 < \eta < 1$).

Des weiteren hatten Netztopologie und Neuronenzahl der verdeckten Schicht im Intervall $10 < N_i < 320$ gegenüber der Stichprobengröße trotz stark variierender Parameterterzahlen kaum Einfluß auf die Klassifikationsleistung und mehrschichtige Netze wiesen gegenüber zweischichtigen bei gleicher Neuronenzahl keine Vorteile auf.

Die Anzahl freier Parameter sollte nach ihren Ergebnissen von einem Wert in Höhe der Ensemble-Größe bis zu einem Abfall der Evaluierungsleistung gesteigert werden.

Allgemein ist eine in Fachkreisen deutliche Verschiebung der Wertbeimessung für Netztopologie und Lernalgorithmen zu Stichprobenumfang und Merkmalsgüte festzustellen (persönliche Gespräche des Autors mit Dr. habil. Schmutz²⁰ und Dr. Wilke²¹), welche die empirische Erfahrung des Autors mit

¹⁹ n: --> "n-te Iteration des Trainingssets", nicht "n-tes Stichprobenelement"

²⁰ Fraunhofer Institut für Produktionstechnik und Automatisierung Stuttgart

verschiedenen Netzarchitekturen stützt.

Bei sorgfältiger Wahl der Trainingsbeispiele und einer der Problemdimension angepaßten Stichprobengröße weisen die tauglichen Topologien in der Praxis eine deutliche Bandbreite auf.

Verminderte Zahl freier Parameter und dementsprechend kürzere Trainingszeiten können je nach Modellannahme über unvollständige Vernetzung oder gleichen Wichtung verschiedener Neuronenverbindungen (*weight-sharing*), erreicht werden; als zusätzliches Optimierungskriterium während des Lernvorganges mag die für einen vorgegebenen Fehler ausreichende Neuronenzahl dienen.

Ähnlich dem durch eine Metrik definierten Nächste-Nachbar-Klassifikator, welcher die unbekannte a posteriori-Wahrscheinlichkeit eines zu klassifizierenden Vektors $\mathbf{v}$

$$P(\omega | \mathbf{v})$$

über die in einer n_v -dimensionalen Kugel um $\mathbf{v}$ mit Radius r

$$V_{n_v}(r) = \frac{2\pi^{\frac{n_v}{2}}}{n_v \Gamma\left(\frac{n_v}{2}\right)} r^{n_v}$$

enthaltenen Referenzvektoren einer Stichprobenmenge schätzt, dessen Raumauflösung aber für $r' < 1$ wegen

$$\lim_{n_v \rightarrow \infty} V_{n_v}(r') = \lim_{n_v \rightarrow \infty} \frac{2\pi^{\frac{n_v}{2}}}{n_v \Gamma\left(\frac{n_v}{2}\right)} r'^{n_v} = 0$$

minimal wird, suchen Stützwertapproximationsansätze über *Radial-Basis-Functions* die unbekannte Entscheidungsfunktion f durch Superposition gewichteter Elementarfunktionen mit begrenztem Support

$$\rho_i(|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i|) = e^{-c_i |\mathbf{x} - \mathbf{w}_i|} \quad ; \mathbf{w}_i \triangleq \text{Stützstelle}_i$$

im Bereich der Referenzvektoren gemäß

$$\hat{f}(x) = \sum_i a_i \rho_i(|\mathbf{x} - \mathbf{w}_i|^2) + a_0$$

in einem Lernprozess anzunähern.

Kreßel, Schürmann und Franke (1991) führen die konnektionistischen Ansätze *Multilayer-Perceptron* und *Radial-Basis-Functions* jedoch auf den Polynomklassifikator (cf. oben) zurück und erkennen keine prinzipielle Überlegenheit gegenüber klassischen Verfahren.

Im Gegensatz hierzu sehen Raus, Kreft und Ameling (1991) eine überlegene Leistungsfähigkeit Neuronaler Ansätze gegenüber konventionellen Bildverarbeitungsalgorithmen²² bei geringeren Entwicklungszeiten

²¹ Lehrstuhl für Programmiersprachen, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen

²² Skelettierung

vor allem für Erkennungsprobleme mit komplexer Entscheidungsfunktion, welche bei herkömmlichen Verfahren nur mit großem Aufwand angenähert werden kann, und weisen am Beispiel der Fahrzeugkennzeichenerkennung insbesondere auf die Anpassungsfähigkeit des Netzes an geänderte Außenbedingungen hin.

Für die Zellbildklassifikation erhielten Grau und Gahm (1991) aufgrund der bei Backpropagation-Netzen im Vergleich mit numerischen Verfahren besseren Approximation der Separierungsfunktion, deren Genauigkeit von der Zahl verborgener Neuronen abhängt, ebenfalls eine höhere Erkennungsleistung extrahierter Merkmale.

Des weiteren erkennen Groß und Seibert (1991) in Hinblick auf die bei multispektralen Scannerdaten nicht sicher gegebene Gauss-Verteilung als Voraussetzung eines Maximum-Likelihood-Klassifikators wesentliche Vorteile sowohl der selbstorganisierenden "unsupervised" Kohonen-Feature-Map²³ als auch des Multilayer-Perceptrons aufgrund deren Fähigkeit zur Approximation komplexer Verteilungen und führen exemplarisch die pixelweise Klassifikation von Landsat-5-TM-Spektralkanälen im Bereich Monitoring und Landnutzungsplanung an.

Zur Überwindung lokaler Minima während des Gradientenabstiegs werden (Rojas 1994) in Anlehnung an Legierungsprozesse Simulationen thermischen Abkühlens (*simulated annealing*)²⁴ untersucht, welche die jeweiligen Gewichtsänderungen lediglich als stochastische, einem Temperaturterm unterworfenen Größen verstehen.

Im Falle der *Boltzmann-Maschine* gelten so für Neuronen x_i mit binären Ausgängen die Zustandswahrscheinlichkeiten

$$x_i = \begin{cases} 1 & ; p_i \\ 0 & ; 1 - p_i \end{cases}$$

mit

$$p_i = \frac{1}{1 + e^{\frac{-\sum_{j=0}^{J-1} w_{ij} x_{j-1}}{T}}} \quad ; T \text{ Temperatur}$$

Obwohl lokale Minima bei der Texturerkennung in Videobildern nach persönlicher Erfahrung selten auftreten, ist der Ansatz nach Dafürhalten des Autors vielversprechend und wird voraussichtlich in einer weiteren Forschungsarbeit untersucht werden.

Nach dem gegenwärtigen Kenntnisstand bleibt festzuhalten, daß Backpropagation-Netze für

- komplexe Entscheidungsfunktionen in hochdimensionalen Räumen
- "ill-posed"-Problemen mit mehr Lösungen als Randbedingungen (cf. Polynominterpolation)
- Veränderlichkeit des mustererzeugenden Prozesses
- Fragestellungen mit hohem Rechen- und/oder Regelaufwand numerischer Verfahren

nicht zuletzt aufgrund in weiten Bereichen indifferenter Netztopologie vorteilhaft sein können, sofern Sorgfalt auf Stichprobengröße und Merkmalsauswahl verwandt wird.

²³ entspricht nicht überwachter Clusteranalyse durch konkurrierende "Attraktion" von Stützvektoren

²⁴ simuliertes Vergüten

In diesem Zusammenhang hat sich die Wavelet-Transformation mit einem Daubechies-4-Koeffizientenvektor (cf. oben) für Kompression und Merkmalsgewinnung wegen ihrer "Detailtreue" und Rechengeschwindigkeit bei deutlich geringeren Randeffekten der Gabor-Transformation überlegen erwiesen.

Im Vergleich hierzu führt etwa die Fensterfunktion eines Gabor-Kernes zu einer Verfälschung des Spektrums, welche sich insbesondere bei der zur Beschränkung der Eingangsdatenmenge eines Klassifikators notwendigen geringen Fenstergröße deutlich bemerkbar macht und für Cosinus-Fenster den Gesetzen des Modulationstheoremes folgt.

Die Vielzahl orthogonaler und nicht orthogonaler Basissysteme, Wavelet Arten (*Daubechies-Wavelets*, *Meyer-Wavelets*, *Lemarie-Wavelets* nach Entwurf im Fourier-Raum, *Spline-Wavelets*) und theoretischen Neuerungen wie etwa *Wavelet-Packages* dürften das ihren Eigenschaften²⁵ und Vorteilen gebührende breite Anwendungsfeld bisher jedoch in manchen Fällen ebenso verhindert haben wie eine etwas "trockene" Fachliteratur der führenden Mathematiker.

Praxisrelevante Problemfelder können die Ermangelung eines Faltungstheoremes und fehlende Filteralgorithmen sein.

Ein Unterschied der Koeffizientenvektoren (Daub4, Daub8, ...) in Bezug auf Reduktionsleistung und Informationstreue konnte hingegen nach Augenschein und hinsichtlich Klassifizierbarkeit gewonnener Merkmalsvektoren nicht festgestellt werden, welche demzufolge über den bezüglich Rechenzeit vorteilhaften Daub4-Koeffizientensatz (cf. oben) berechnet wurden.

Die objektorientierte Programmierung unter C++ hat sich für den Autor angesichts der algorithmischen Komplexität insbesondere durch Überladung von Operatoren, Verwendung von "Templates", Klassenhierarchien, Referenzen und dynamische Speicherallokation von Objekten neben unverzichtbarer Zeigerarithmetik und Assemblernähe von C nicht zuletzt zur Entwicklung einer graphischen Benutzeroberfläche²⁶ ausschließlich bewährt.

Demgegenüber stehen jedoch ein relativ hoher Verwaltungsoverhead des Systemes für "Templates"²⁷ und ein nicht zu unterschätzender Einarbeitungsaufwand für fortgeschrittene C++-Entwicklung und X-Windows-, bzw. OSF/Motif-Programmierung unter Bildverarbeitungsaspekten, weswegen sich der obligatorische C++-Debugger²⁸ auf Quell-Code-Ebene als unverzichtbar erwies.

Mit den dargelegten Verfahren Multi-Skalen-Analyse, Multilayer-Perceptron (MLP)²⁹ und Fuzzy-Regelung eröffnet sich ein breites Feld forstwissenschaftlicher Anwendungen, für welche vorliegende Arbeit eine konkrete Grundlage in Theorie und angewandter Informatik schaffen wollte.

²⁵ Die Basilarmembran des menschlichen Ohres kann man als Wavelet-Transformator verstehen, indem Frequenzen durch den konischen Verlauf auf verschiedenen Skalenniveaus gefiltert werden

²⁶ X11R5, X Toolkit Intrinsics, OSF/Motif 1.2

²⁷ allein die Linkzeit der Object-Files betrug auf einer HP9000/715/64 Infolge Template-Verwaltung 20 min.

²⁸ engl.: bug = "Wanze"

Debugger: Modul für einzelschrittweise Programmausführung und Überwachung beteiligter Adressen, Parameter und CPU-Register zur Fehlerdiagnose auf Assembler- und/oder Quellcode-Ebene

²⁹ ebenso selbstorganisierende, unüberwachte Kohonen-Feature-Maps zur Clusteranalyse

Ein abschließender, notgedrungen eklektischer Ausblick soll die methodisch prädestinierenden Gemeinsamkeiten so verschiedener Interessensfelder wie etwa

- Zeitreihenanalyse	Wavelet, MLP
- Trendbereinigung	Wavelet
- Geräteeichung	Wavelet
- Datenkompression	Wavelet
- Jahrringanalyse	Wavelet, MLP
- Dendrochronologie	Wavelet
- Überwachung seltener Ereignisse bei	Fuzzy
- Daueraufnahmen	
- Freilandflächen	
- Langzeitversuchen	
- Monitoring, Klimameßkammern, Laborreihen	
- Prozessteuerung und Überwachung im Sägewerk und bei Holzernte	MLP, Fuzzy, (Wavelet)
- ökonomische Stammaufteilung	
- Qualitätskontrolle,	
- Ausschußminimierung	
- Kontrolle und Regulierung des Bodendruckes von Fahrzeugen	
- Steuerung von Entrindungsmaschinen	
- Andruckverhalten	
- Ausschuß	
- betriebswirtschaftliche Optimierung	
- Lösung innerbetrieblicher "traveling salesman" Probleme	Kohonen-Feature-Map
- Trendabschätzung (Holzmarkt)	MLP, Fuzzy
- Routineauszählungen im Labor	MLP
- Handschriftenerkennung für mobile Datenerfassungsgeräte	MLP
- (Prognose)modelle	MLP, Fuzzy
- Zuwachsverhalten	MLP, Fuzzy
- Populationsdynamik	MLP, Fuzzy
- Schädlingsgradationen	MLP, Fuzzy
- Sturmgefährdung von Beständen	MLP
- Funktionsapproximation und Statistik	
- Ertragstafelmodelle	MLP
- Clusteranalyse	Kohonen-Feature-Map
- Karhunen-Loeve-Transformation	Kohonen-Feature-Map
- komplexe Wirkungsgefüge von Ökosystemen	MLP
- Ablösung der Fourier-Transformations-Infrarot-Spektroskopie	Wavelet
- Klimamodelle und Simulationen (Turbulenz, Austausch)	Wavelet
- Materialprüfung in der Holzforschung	Wavelet, MLP
- Satellitenbilddauswertung	MLP, Kohonen-Map
- soziologische und forstpolitische Erklärungsmodelle	MLP, K-Map, Fuzzy
- Freizeitverhalten	
- Meinungstrends	
- Wahlprognosen	

noch einmal schlaglichtartig erhellen:

Visuell erfassbare Information, z.B. Stand- und Bewegtbilder aber auch Sensorabbildungen, werden mit obligater Online-Verfügbarkeit und Datenbankhaltung im Zuge moderner Kommunikationsnetze zunehmende Bedeutung gewinnen.

Mikroanatomische Aufnahmen der Biowissenschaften oder Holzforschung, Scannerdaten in Fernerkundung oder Literaturdatenbank, Computertomographien von Bodenprofilen und photographische Auszählungen von Laborversuchen stellen an Speichermedien, Retrieval- und Übertragungszeiten ebenso hohe Anforderungen wie vieldimensionale Datensätze aus Feldversuchen, meteorologischen Meßreihen, geographischen Informationssystemen und Bilddokumentationen.

Datenströme der Fernerkundung etwa wachsen zwar linear mit der Kanalzahl und reziprok zum Meßintervall, jedoch quadratisch zur Auflösung, weswegen in vergleichbaren Anwendungen Datenhaltung, Antwort- und Bildaufbauzeiten bei Vernetzung von Behörden, Forschungsinstituten und Anwendern vor Ort entsprechend eingeschränkt sind.

Mit mangelnder Verfügbarkeit sinken jedoch Aktualität wie Gebrauchswert und degradieren jede Datenvorhaltung zur Verwaltungsroutine.

So interessieren in akuter Waldschutzsituation obsolete Luftbilder ebensowenig wie lokale Entscheidungsträger benötigte GIS-Daten als DAT-Bänder bei der Post abholen möchten oder Datenfriedhöfe von Permanent-Meßstationen Jahre später mehr als archivarischen Charakter besitzen.

Auch bedingt jede automatisierte Informationsverarbeitung, sei es Feinsteuerung von Entrindungsmaschinen, Einschnittoptimierung im Sägewerk oder bodenpflegliche Reliefanpassung von Harvester-Chassis besonders unter Echtzeit-Bedingungen eine erhebliche Reduktion der für komplexe Erkennungsaufgaben wie kybernetische Regelung notwendigen Datenflut, um numerische Verfahren oder neuronale Algorithmen überhaupt erst erfolgreich anwenden zu können.

Im Bereich Fernerkundung etwa werden neben GIS-Anforderungen bei wachsender Kanal- und Sensorzahl vor allem aufgrund allgemeiner Vernetzung für Datenhaltung, selektiven Abruf, Verschneidung und Verarbeitungsgeschwindigkeit nicht zuletzt mit Tendenz zu Bewegtbildern effektive Kompressionsalgorithmen ausschlaggebende Bedeutung gewinnen.

Unter dem klassischen JPEG-Algorithmus³⁰

- Zerlegung der Bildmatrix in Quadrate, deren Kantenlänge ungefähr einem mittleren Ähnlichkeitsbereich aufgrund von Nachbarschaftsbeziehungen entspricht
- Fouriertransformation der Quadrate
- Logarithmierung des Spektrums zur "Annullierung" kleiner Amplituden
- Huffman-Codierung des Restspektrums von niederen zu hohen Frequenzen hin

treten etwa aufgrund steiler Kanten an den Rändern der Quadrate wegen periodischer Basisvektoren entsprechend viele schnelle Schwingungen auf, die sich jenseits des Flankenanstieges gegenseitig aufheben.

Dieses Problem liegt allein in der Periodizität der trigonometrischen Funktionen begründet, welche die Approximation eines lokalen Impulses (einer Bildkante) nur durch eine Vielzahl einblendender Kompensationsschwingungen jenseits des Flankenanstieges "erkaufen" lassen. Entsprechende Unschärfe-Probleme zwischen Orts- und Frequenzraum treten allgemein bei gefensterten, d.h. ausschnittweisen Fourier-Transformationen auf, wie sie gerade für praktisch allgegenwärtige Zeitreihenanalysen typisch sind.

Verwendet man hingegen aperiodische, d.h. räumlich begrenzte Wavelets, so kann man, etwas salopp formuliert, örtliche Details durch lokale Bausteinüberlagerung konstruieren, ohne sich um

³⁰ Joint-Photographic-Experts-Group

hierdurch induzierte "Bauschäden" abseits der "Kanten-Baustelle" kümmern zu müssen. Für die Kompression von Fernerkundungsdaten beispielsweise bedeutet dies eine Verringerung des mit hohen Kompressionsstufen unvermeidlichen Informationsverlustes.

Fig. 51 bis Fig. 53 zeigen die einfache, rein schematische Approximation eines Luftbildes (Waldschneise) nach Wavelettransformation als Hidden-Surface-Wireframe des Grünkanales³¹. Da in jeder Approximationsstufe ohne Rücksicht auf die Frequenzcharakteristik, d.h. vorherrschende Feinheit des Bildinhaltes lediglich die jeweils größten Wavelet-Bausteine beibehalten wurden, sind die Kompression aufgrund des gewählten simplen Reduktionsschemas keineswegs optimal³² und der Bildausschnitt wegen interaktiver Auswahl zudem jeweils leicht verschoben. Streicht man in einer realen Applikation nicht alle Frequenzen über einem a-priori-Schwellwert, sondern lediglich die nach Logarithmierung verschwindenden Amplituden des betrachteten Bildes in Verbindung mit anschließender Huffman-Codierung, erreicht man freilich eine wesentlich bessere Annäherung des Bildes bei noch höheren Kompressionsstufen.

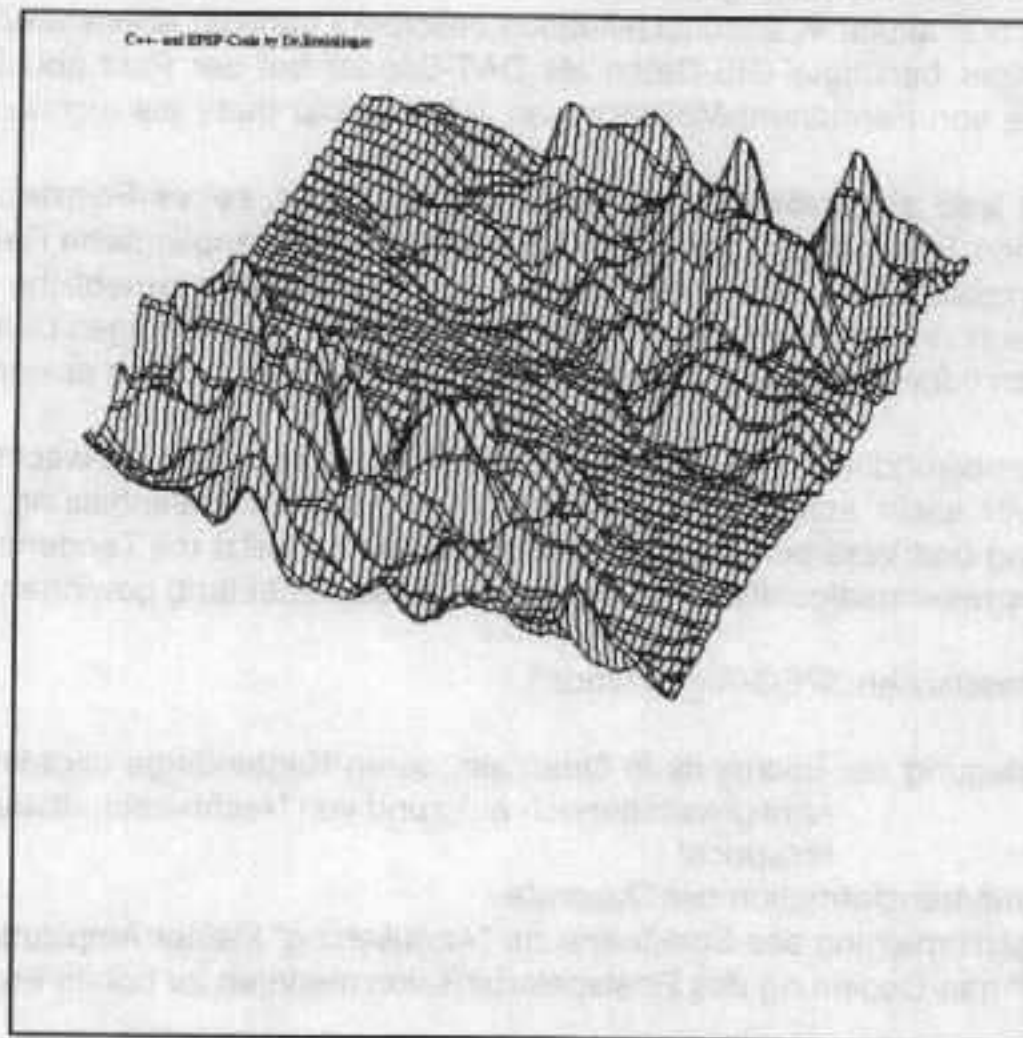


Fig. 51: 3D-Grünkanal-Plot eines S-VHS-Luftbildes (Waldschneise)

³¹ Eine ähnliche Bild-Folge ergäbe die Trendbereinigung eines 2-dimensionalen Datensatzes

³² Eine Vorgehensweise analog obigen JPEG-Algorithmus' erhält wesentlich mehr hohe Frequenzen, mithin kleine Bausteine und somit feine Details, während in obigem Beispiel vereinfachend nur "grobe Wackersteine" übrig blieben. Streng genommen ist eine solches Verfahren ausschließlich bei weithin homogenen Bildinhalten statthaft, für Waldtexturen wenig sinnvoll und lediglich geeignet, den Kerngedanken zu verdeutlichen.

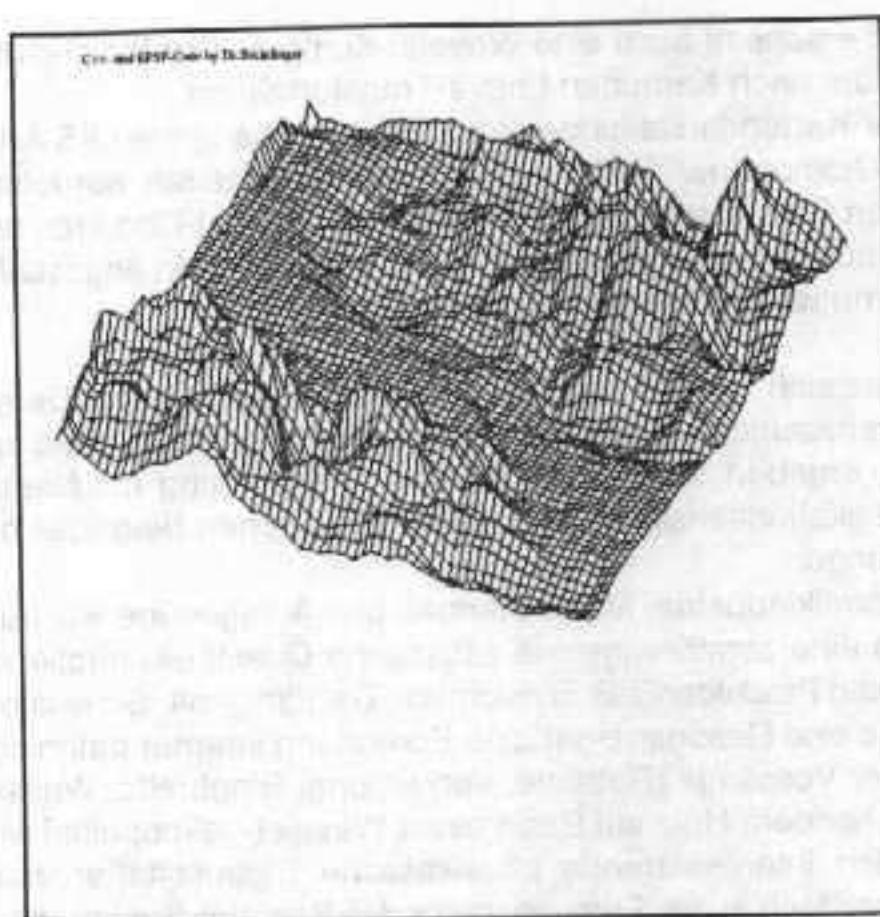


Fig. 52: Elimination von 75% der Daten nach Wavelet-Transformation

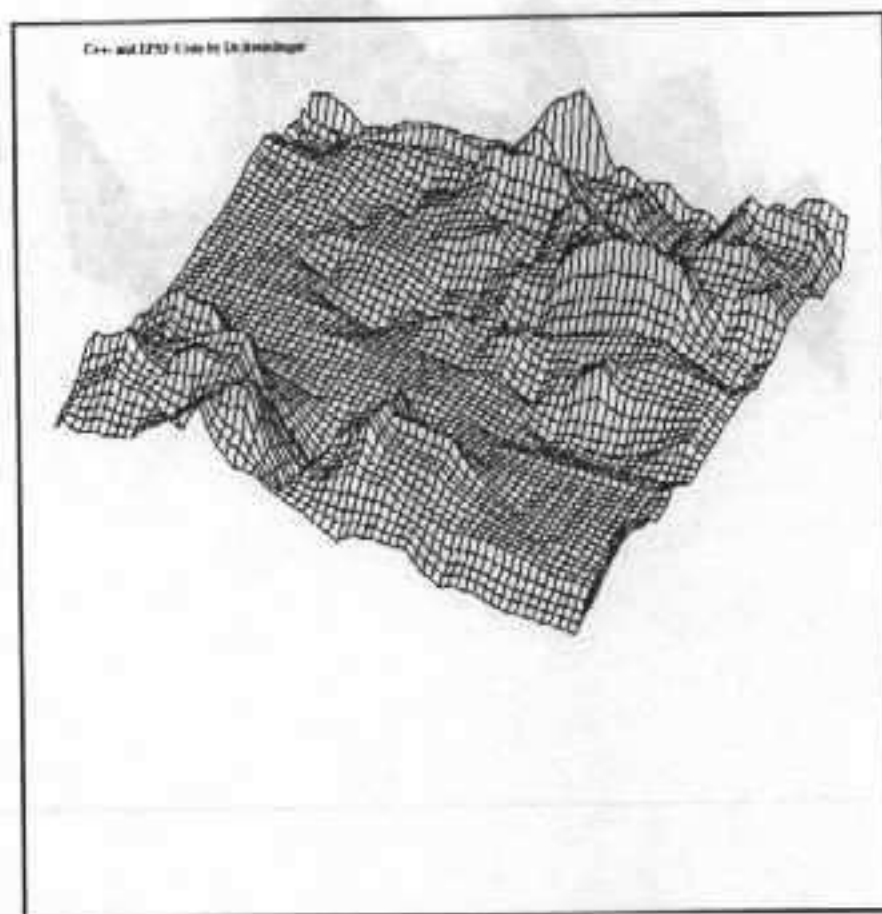


Fig. 53: Elimination von 93.75% der Daten nach Wavelet-Transformation

Vielversprechend erscheint auch eine Wavelet-Kompression lediglich der ersten Hauptachsen mehrkanaliger Bilder nach Karhunen-Loeve-Transformation.

Besonders Raster-Kartendarstellungen im Zusammenhang mit GIS-Anwendungen sollten sich aufgrund weithin homogener Farbbereiche mit vereinzelt abrupten Kanten³³ ebenso wie Jahrringprofile von Stammscheiben recht effizient Wavelet-Codieren lassen. Der Autor hat auf diesen Gebieten jedoch noch keine eigenen Untersuchungen angestellt und äußert daher eine (allerdings mathematisch fundierte) Vermutung.

Während Wavelets sich in der Forstmeteorologie zu Analyse und Darstellung von Austauschprozessen an Grenzschichten bereits etablieren (Farge 1990, Gao und Li 1993, Katul und Parlange 1994)³⁴, ergeben sich insbesondere in Verbindung mit Neuronalen Netzen vielversprechende Klassifikationsansätze unmittelbarer praktischen Belanges bei vielen weiteren messenden Fachrichtungen.

Ähnlich den in Keramikindustrie, Maschinenbau und Anlagenüberwachung bereits eingeführten Verfahren ist etwa eine zerstörungsfreie akustische Qualitätskontrolle von Rohholz, Holzwerkstoffen und raffinierten Produkten z.B. hinsichtlich Tragfähigkeit, Schwachstellen oder Rißbildung ebenso denkbar wie eine Resonanz-gestützte Erkennung interner pathologischer Veränderungen und physiologischer Vorgänge (Rotfäule, Verkernung, Ringbreite, Wasserhaushalt, Wuchsanomalien etc.) an stehendem Holz auf Basis eines Wavelet-gekoppelten Multilayer-Perceptrons. Bilden sich nämlich interessierende physikalische Eigenschaften nach einer unbekannten Funktion klassenspezifisch in den Frequenzraum des Wavelet-Spektrums ab, so approximiert ein trainiertes Neuronales Netz die (immer noch unbekannte) Entscheidungsfunktion der Grundgesamtheit bestmöglich.

Eine exemplarische Trennung eines 2-dimensionalen Merkmalsraumes zeigt Fig. 54.

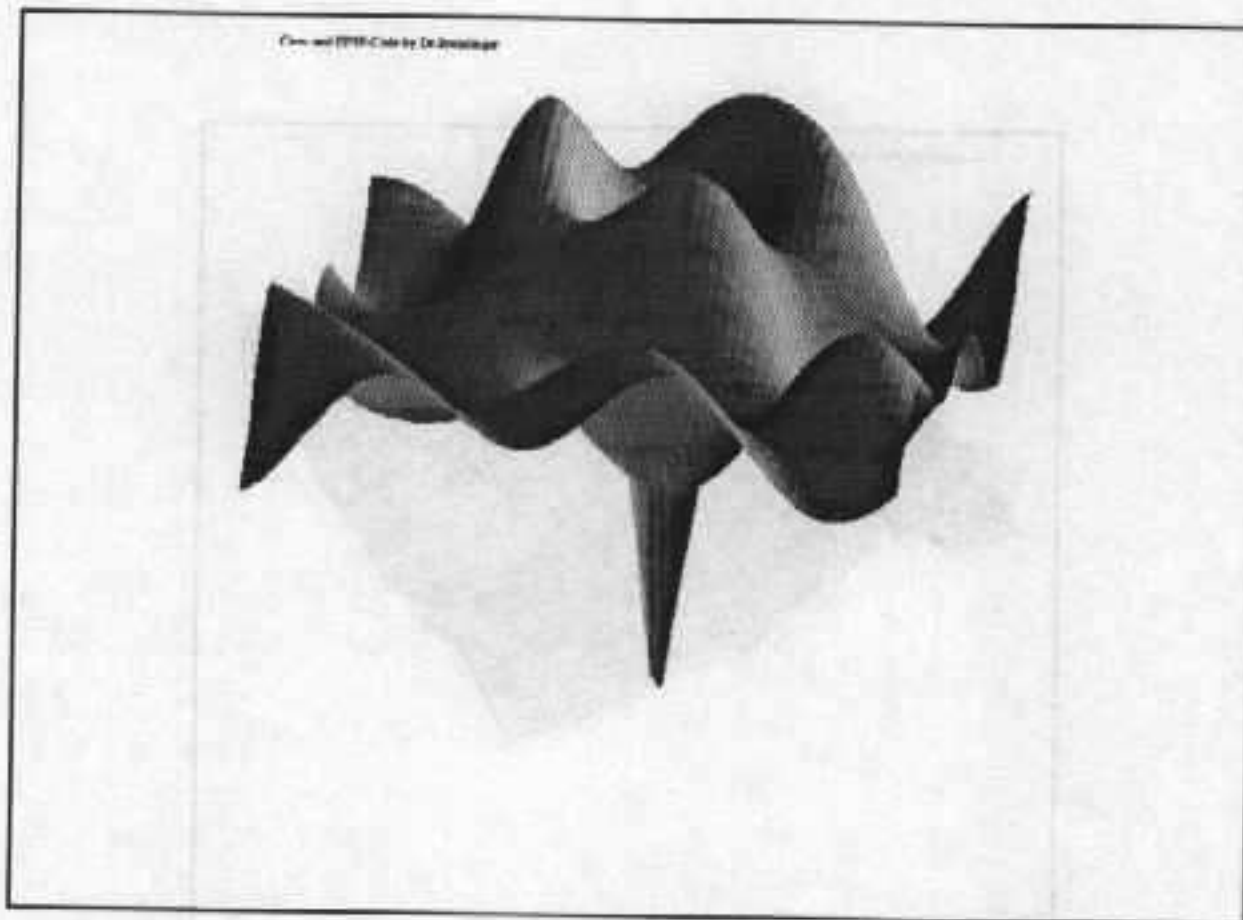


Fig. 54: Beispiel einer 2-dimensionalen Entscheidungsfunktion im Merkmalsraum

³³ entsprechend Dirac-Impulsen mit sehr "ungünstigen" Fourier-Spektren

³⁴ Für Literaturhinweise wie regen fachlichen Austausch sei Herrn Dipl.-Meteorologe Martin Winterhalter vom Lehrstuhl für Bioklimatologie und Immissionsforschung an dieser Stelle besonders gedankt.

Aufgrund der

- zeitdistinkten, d.h. lokal trennscharfen Wavelet-Frequenzauflösung,
- Anpassungsfähigkeit des Netzes an geänderte Außenbedingungen und
- im Vergleich zu numerischen Verfahren theoretisch höheren Verallgemeinerungsfähigkeit des Netzes

bei

- Wegfall eines apriori-Modelles

erscheint die Klassifikation eines komprimierten niederdimensionalen Merkmalsvektors aus Wavelet-Amplituden durch Multilayer-Perceptron daher in der Holzforschung ebenso untersuchenswert wie die

- Erstellung akustischer Bodenprofile bezüglich
 - Horizontfolge
 - Wassersättigung
 - Humusanteil
 - Porenvolumen etc.
 zur schnellen, kleinräumigen Feld-Ansprache oder
- Messung von Untergrundtragfähigkeit, Erosionsstabilität und Bodenverdichtung bei Geräteeinsatz in den Bereichen Standortserkundung, bzw. Arbeitswissenschaft.

Weitere Anwendungsfelder für die Verknüpfung von Multi-Skalen-Analyse und Multilayer-Perceptron bilden

- Überwachung des Frequenzganges von Maschinen zur
 - Einhaltung von Sicherheitsintervallen,
 - Präzisierung von Ersatzbeschaffungszeitpunkten, sowie
 - Minimierung kostentreibender Fristen-Wartungen und Ausfallzeiten
- Klassifikation spektroskopischer Banden-Folgen der Holzchemie
- Einschnittoptimierung im Sägewerk anhand anomaler "Schall-Muster" infolge von Holzfehlern oder die
- Einschätzung von Schneekonsistenz, Lawinenabgängen und Erdmassenverlagerungen im Zuge des Hangverbaues auf Erosionsstandorten über Reflexion und Laufzeit induzierter Impulse

Dabei kann das neuronal erlernte Entscheidungspolynom, dessen Koeffizienten sich in den Gewichten eines trainierten Netzes manifestieren, im Merkmalsraum auch stückweise aus Funktionen begrenzten Supports, Radial-Basis-Functions oder Fuzzy-Sets, angenähert werden.

Da die Regression des Zielvektors auf seine Variaten während des neuronalen Lernalgorithmus ohne quantitative apriori-Modellbildung³⁵ anhand einer Fehlerfunktion mit höherer Wahrscheinlichkeit erwartungstreu optimiert wird als beim klassischen Polynomansatz. (cf. oben), sollten alle Fachbereiche, welche komplexe Wirkungsgefüge anhand von Beispieldatensätzen modellieren, ihr angestammtes Methodenarsenal um Error-Backpropagation-Netze erweitern.

Hierzu zählen nicht zuletzt aufgrund der "Akkomodation" des Netzes an geänderte Außenbedingungen durch neue Trainingsläufe etwa

- die Anpassung von Ertragstafeln an "mikro"-klimatische und standörtliche Bedingungen
- waldbauliche Simulation, Behandlungskonzepte und Bestandesentwicklung

³⁵ Die Netzarchitektur spiegelt jedoch den Polynomgrad der Entscheidungsfunktion

- Holzmarktprognosen anhand externer und autoregressiver Rahmendaten
- kleinräumig verjüngungssensible Wildstandsbewirtschaftung
- Gradations- und Forstschutzmodelle bei Schädlingskalamitäten, sowie Überwachung und Dosierung endemisch planbarer Biocid-Einsätze mit indikatorgestützter Rückkoppelung

, aber auch

- betriebliche Simulationen und Forsteinrichtungsplanspiele mit großen regional erhobenen Datensätzen zur Optimierung von Zielkriterien oder
- Entwicklungsprognosen endemischer Waldschäden über
 - Freilandmeßreihen und
 - GIS-Eckwerte (Wasserregime, Bodeninventur etc.), sowie das
- Erkennen charakteristischer Merkmalskonstellationen neben Plausibilitätsprüfungen im Rahmen von Feldversuchen und Monitoring-Aufgaben.

Zusammenfassung

Moderne Signalanalyseverfahren für Kompression und Merkmalsextraktion gewinnen angesichts exponentiell wachsenden Datenaufkommens in messenden und modellbildenden Fachrichtungen ebenso zunehmende Bedeutung wie eine automatisierte Auswertung von Routineversuchen. Vor diesem Hintergrund beschäftigt sich die Abhandlung stellvertretend für ein breites Feld forstlicher Einsatzmöglichkeiten am Beispiel der Texturanalyse in Videobildern der Fernerkundung mit der Merkmalsgewinnung aus reduzierten Wavelet-Spektren und ihrer Klassifikation über ein Multilayer-Perceptron als Vertreter Neuronaler Netze.

Wavelet-Analyse und Multilayer-Perceptron bieten gegenüber Fourier-Transformation, bzw. polynomieller Stützstellenapproximation im Merkmalsraum Vorteile.

Die herkömmliche Gabortransformation unterliegt wie alle Short-Time-Fourier-Transformationen fensterbedingten Artefakten; Entwicklungen nach trigonometrischen Funktionen geben pauschale Signaleigenschaften, nicht jedoch lokale Frequenzcharakteristika wieder und besitzen infolgedessen lediglich eingeschränkte Analyseeigenschaften.

Vektorräume aperiodischer **Wavelets**, "Wellchen" begrenzten Supports, ermöglichen über Signalabbildung in orthogonale Skalenräume mittels iterativer Quadraturfilter die Extraktion zeitabhängiger Schwingungscharakteristika, woraus deren besondere Eignung für Datenkompression und Merkmalsgewinnung resultiert. Beispiele aus Bildverarbeitung und Mustererkennung werden angeführt.

"**Mallat's Pyramidal Algorithm**" gibt eine der FFT bezüglich Rechenzeit deutlich überlegene Implementierungsmöglichkeit an die Hand, welche gegenüber der Fourier-Analyse jedoch eine höhere mathematische Komplexität aufweist.

Die für Verständnis, Implementierung und Anwendung notwendigen Modellvorstellungen werden daher in einem geschlossenen Kontext pragmatisch dargestellt und über eine Reihe Computergraphiken verdeutlicht.

Basierend auf dem Merkmalsvektor der 6.25% niederst skalierten Wavelet-Amplituden eines 2-dimensional transformierten Videosignales ist der letzte Abschnitt Theorie und konkreter Programmierung eines **fuzzy-gesteuerten Multilayer-Perceptron** zur Klassifikation der Wavelet-Spektren über Funktionsapproximation mittels überwachter Fehlerkorrektur in einem Gradientenabstiegsverfahren gewidmet. Damit wird die entscheidungstheoretische Abgrenzung zum klassischen Polynomansatz gesucht.

Die Einordnung konnektionistischer Ansätze im Vergleich mit klassischen Verfahren erfolgt exemplarisch anhand aktueller Forschungsergebnisse; forstliche Anwendungsschwerpunkte für Wavelet-Analyse und/oder neuronale Klassifikation wie etwa

- Reduktion hochdimensionaler Datensätze im Vorfeld von Auswertungen
- Zeitreihenanalyse, Trendbereinigung
- zerstörungsfreie akustische Qualitätskontrolle von Rohholz und Holzwerkstoffen, bzw. Einschnittoptimierung im Sägewerk durch Erkennen von Holzfehlern
- schallinduzierte Bodenprofile für kleinräumige Standortsansprache
 - Horizontfolge, Wasserhaushalt, Verdichtung, Tragfähigkeit etc.
- Maschinenüberwachung anhand des Frequenzganges
 - Präzisierung von Ersatzbeschaffungszeitpunkten
 - Minimierung von Wartungskosten
- Ablösung der Fourier-Transformations-Infrarot-Spektroskopie in der Holzforschung
- Ertragstafelmodellierung und waldbauliche Simulation
- Prognosemodelle
 - Wildstandsbewirtschaftung
 - Holzmarkanalysen
- Forsteinrichtungsplanspiele unter varilierenden Konstellationen
- Online-Plausibilitätsprüfungen bei Freilandversuchen und Meßreihen

werden vorgeschlagen.

Die angeführten Methoden sind Module des vom Autor in C++ unter X11R5 und OSF/Motif1.2 entwickelten Softwarepaketes "sphinX" für Digitale Signal- und Bildverarbeitung, Numerik, Video-Einblendung, Neuronale Netze und 3D-Computergraphik mit interaktiver Benutzeroberfläche.

Verwandte Literatur

- Anonymus, Postscript Language Reference Manual, Addison Wesley, 1990
- Anonymus, Postscript Language Tutorial and Cookbook, Addison Wesley, 1993
- A.Barron, Neural Net Approximation, in Proceedings of the Seventh Yale Workshop on Adaptive and Learning Systems, Yale University, 69-72, 1992
- E.Baum, D.Haussler, What Size Net gives valid Generalization ?, Neural Computation 1, 151-160, 1989
- R.Blahut, Fast Algorithms for Digital Signal Processing, Reprinted with Corrections, Addison Wesley, 1987
- R.Bracewell, The Fourier Transform and Its Applications, Second Edition, McGraw Hill, 1986
- H.Breinlinger, Algorithmen zur 2-dimensionalen digitalen Signal- und Bildverarbeitung unter Occam, Diplomarbeit der Forstwissenschaftlichen Fakultät der Ludwigs-Maximilians-Universität München, 1993
- H.Breinlinger, Grundlagen der Video- und Fernsehtechnik, Bericht der Bayerischen Landesanstalt für Wald und Forstwirtschaft, 1993
- E.Brigham, Schnelle Fourier-Transformation, 5.verbesserte Auflage, Oldenbourg, 1992
- I.Bronstein, K.Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 25.Auflage, Harri Deutsch, 1991
- I.Bronstein, K.Semendjajew, Ergänzende Kapitel zu Taschenbuch der Mathematik, 6.Auflage, Harri Deutsch, 1991
- C.Chui, An Introduction to Wavelets, Wavelet Analysis and Its Applications Volume 1, Academic Press, 1992
- C.Chui, Wavelets A Tutorial in Theory and Applications, Wavelet Analysis and Its Applications Volume 2, Academic Press, 1992
- G.Cybenko, Approximation by Superposition of a sigmoidal Function, in Mathematics of Control, Signals and Systems, 2, 303-314, 1989
- I.Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Siam, 1992
- R.Duda, P. Hart, Pattern Classification and Scene Analysis, John Wiley, 1973
- M.Ellis, B.Stroustrup, The Annotated C++ Reference Manual, Addison Wesley, 1990
- G. Engeln-Müllges, Numerik-Algorithmen mit ANSI C-Programmen, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1993
- M.Farge, The Continuous Wavelet-Transform of Two-Dimensional Turbulent Flows, in Wavelets and Their Applications, Jones and Bartlett, S.275-302, 1992

- P.Ferguson, Motif Reference Manual, O'Reilly and Associates, 1993
- D.Flanagan, X Toolkit Intrinsic Reference Manual, Third Edition, O'Reilly and Associates, 1992
- K.Fukunaga, Statistical Pattern Recognition, Second Edition, Academic Press, 1990
- W.Gao, B.Li, Wavelet-Analysis of Coherent Structures at the Atmosphere-Forest Interface, Journal of Applied Meteorology, Volume 32, S.1717-1725, 1993
- G.Golub, C. van Loan, Matrix Computations, Second Edition, John Hopkins, 1989
- O.Grau, T.Gahm, Anwendung Neuronaler Netze zur Zellbildklassifikation, in Mustererkennung 1991 13.DAGM-Symposium München, Informatik Fachberichte 290, Springer, 1991
- M.Groß, F.Seibert, Multispektralklassifikation von Fernerkundungsdaten mittels neuronaler Netze, in Mustererkennung 1991 13.DAGM-Symposium München, Informatik Fachberichte 290, Springer, 1991
- I.Guyon, Applications of Neural Networks to Character Recognition, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 5, 353-382, 1991
- R.Haralick, L.Shapiro, Computer and Robot Vision, Volume 1, Addison Wesley
- J.Hartung, B.Elpeit, Multivariate Statistik, 4.durchgesehene Auflage, Oldenbourg, 1992
- S.Haykin, Neural Networks, A Comprehensive Foundation, Macmillan, 1994
- D.Hearn, P.Baker, Computer Graphics, Second Edition, Prentice Hall International Editions
- E.Hecht, Optics, Second Edition, Addison Wesley, 1987
- D.Heller, P.Ferguson, Motif Programming Manual, O'Reilly and Associates, 1994
- R.Henkel, U.Kreßel, Konfigurieren und Trainieren von Multilayer-Perceptrons am Beispiel der Ziffernerkennung, in Mustererkennung 1992 14.DAGM-Symposium, Informatik aktuell, Springer, 1992
- B.Jaehne, Digitale Bildverarbeitung, 2. vollst. neubearb. Auflage, Springer 1991
- A.Jain, Fundamentals of Digital Image Processing, Prentice Hall, 1989
- P.Jaroslavskij, Einführung in die Digitale Bildverarbeitung, 2.Auflage, Hüthig, 1991
- G.Katul, M.Parlange, On the Active Role of Temperature in Surface-Layer Turbulence, Journal of the Atmospheric Sciences, Volume 51, No. 15, S.2181-2195, 1994
- U.Kreßel, Unterlagen zu CCG-Lehrgang IT5.11, Neuronale Netze in der Mustererkennung, Carl-Cranz-Gesellschaft Oberpfaffenhofen, 1994
- U.Kreßel, J.Schürmann, J.Franke, Neuronale Netze für die Musterklassifikation, in Mustererkennung 1991 13.DAGM-Symposium München, Informatik Fachberichte 290, Springer, 1991
- J.Lim, Two-Dimensional Signal and Image Processing, Prentice Hall International Editions, 1990
- A.Louis, P.Maaß, A.Rieder, Wavelets, Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, 1994
- K.Meyberg, P.Vachenauer, Höhere Mathematik 1, 1. korr. Nachdruck, Springer, 1990

- K.Meyberg, P.Vachenauer, Höhere Mathematik 2, Springer, 1990
- Y.Meyer, Wavelets Algorithms and Applications, Siam, 1993
- Y.Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1992
- B.Moret, H.Shapiro, Algorithms from P to NP, Benjamin Cummings, 1991
- D.Nauck, F. Klawonn, R. Kruse, Neuronale Netze und Fuzzy-Systeme, Vieweg, 1991
- D.Newland, Random Vibrations, Spectral & Wavelet Analysis, Third Edition, Longman Scientific and Technical, 1994
- H.Niemann, Klassifikation von Mustern, Springer, 1983
- A.Nye, Xlib Programming Manual, O'Reilly and Associates, 1992
- A.Nye, Xlib Reference Manual, O'Reilly and Associates, 1992
- A.Nye, T.Reilly, X Toolkit Programming Manual, O'Reilly and Associates, 1992
- A.Oppenheim, R.Schafer, Discrete Time Signal Processing, Prentice Hall, 1989
- Y.Pao, Adaptive Pattern Recognition and Neural Networks, Addison Wesley, 1989
- W.Press, S.Teukolsky, W.Vetterling, B.Flannery, Numerical Recipes in C, Cambridge University Press, Second Edition, 1992
- M.Raus, L.Kreft, W.Ameling, Ein System zur automatischen Kennzeichenerkennung aus Videobildern mit Hilfe neuronaler Verfahren, in Mustererkennung 1991 13.DAGM-Symposium München, Informatik Fachberichte 290, Springer, 1991
- M.Richter, Einführung in die Farbmeterik, 2. Auflage, de Gruyter
- R.Rojas, Theorie der neuronalen Netze, Springer, 1994
- A.Rosenfeld, A.Kak, Digital Picture Processing 1, Academic Press, 1981
- A.Rosenfeld, A.Kak, Digital Picture Processing 2, Academic Press, 1981
- M.Ruskaj (Hrsg.), Wavelets and their Applications, Jones and Bartlett, 1992
- J.Schürmann, U.Kreßel, Mustererkennung mit statistischen Methoden, Daimler Benz AG Forschungszentrum Ulm, 1992
- H.Stöcker (Hrsg.), Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren, Harri Deutsch, 1992
- J.Stoer, Numerische Mathematik 1, 5. Auflage, Springer, 1989
- G.Strang, Wavelets and Dilation Equations: A Brief Introduction, Siam Review, Vol. 31, 1989, Nr. 4, 614-627
- B.Stroustrup, The C++ Programming Language, Second Edition, Addison Wesley, 1991
- T.Tilli, Fuzzy-Logik, Franzis, 1993

V.Vapnik, Estimation of Dependencies based on Empirical Data, Springer, 1982

V.Vapnik, Principles of Risk Minimization for Learning Theory, in Advances in Neural Information Processing Systems 4, 831-838, Morgan Kaufman, 1992

G.Walter, Wavelets and other Orthogonal Systems with Applications, CRC Press, London, 1994

R.Zurmühl, S.Falk, Matrizen 1, 6.Auflage, Springer, 1992

R.Zurmühl, S.Falk, Matrizen und ihre Anwendungen, Teil 2 Numerische Methoden, 5. überarbeitete und erweiterte Auflage, Springer, 1986

10. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
11. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
12. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
13. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
14. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
15. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
16. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
17. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
18. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
19. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.
20. Kohn, R. Estimation of Dispersions based on English Data. *Journal*, 1982.

Folgende Hefte der Reihe "Forstliche Forschungsberichte München" sind bisher erschienen:

- | | | | |
|--------|------|-----------------------------------|--|
| Nr. 46 | 1980 | KOLLOQUIUM | Öffentlichkeitsarbeit als Problem von Forst- und Holzwirtschaft
DM 11.50 |
| Nr. 47 | 1981 | W.LAATSCH
B.ZENKE
J.DANKERL | Verfahren zur Reichweiten- und Stoßdruckberechnung von Fließlawinen
DM 15.00 |
| Nr. 48 | 1981 | M.HORNDASCH
F.FRANZ | Die Standortserkundung in den Staatswaldungen der Oberforstdirektion Augsburg
DM 13.00 |
| Nr. 49 | 1981 | KOLLOQUIUM | Die Statistik über Forst- und Holzwirtschaft - Bestandsaufnahme und Folgerungen
DM 11.50 |
| Nr. 50 | 1982 | A.KARAMERIS | Analyse und Prognose der Erholungsnachfrage in Wäldern als forstlicher Beitrag zur Raumplanung
DM 16.50 |
| Nr. 51 | 1982 | H.RÖHLE | Struktur und Wachstum von Stieleichen-Mischbeständen auf grundwasserbeeinflussten Standorten in den Auewäldern Südbayerns
DM 15.00 |
| Nr. 52 | 1982 | KOLLOQUIUM | Beschränkungen in der Produktion durch externe Einflüsse als Problem von Forst- und Holzwirtschaft
DM 12.50 |
| Nr. 53 | 1982 | H.RODENKIRCHEN | Wirkungen von Meliorationsmaßnahmen auf die Bodenvegetation eines ehemals streugenutzten Kiefernstandortes in der Oberpfalz
DM 22.00 -vergriffen- |
| Nr. 54 | 1983 | KOLLOQUIUM | Möglichkeiten der Stabilisierung des Rohholzmarktes als Problem von Forst- und Holzwirtschaft
DM 11.50 |
| Nr. 55 | 1983 | H.-U.GROSSE | Untersuchungen zur künstlichen Verjüngung des Bergmischwaldes
DM 19.00 -vergriffen- |
| Nr. 56 | 1983 | W.MERGNER | Einfluß des Schalenwildes auf die bäuerliche Waldwirtschaft
DM 20.00 -vergriffen- |
| Nr. 57 | 1983 | E.KENNEL | Waldschadensinventur Bayern 1983 - Verfahren und Ergebnisse-
DM 15.00 |

- Nr. 58 1984 K.UEBELHÖR Struktur und Dynamik von Nothofagus-Urwäldern in den Mittellagen der valdivianischen Anden Chiles
DM 20.00
- Nr. 59 1984 C.-Th.BUES Radiodensitometrische Untersuchung der Variation von Jahrringbreite und Holzdichte in südafrikanischen Pinus radiata-Beständen unter dem Einfluß des Klimas und verschiedener Durchforstungsmaßnahmen
DM 12.50
- Nr. 60 1984 KOLLOQUIUM Der Holzaußenhandel als Problem von Forst- und Holzwirtschaft
DM 11.50
- Nr. 61 1984 R.MOSANDL Löcherhiebe im Bergmischwald
DM 25.00 -vergriffen-
- Nr. 62 1984 G.MAIER Aufnahme und Auswertung von Fichtenbeobachtungsflächen in Bayern
DM 10.00
- Nr. 63 1985 E.-M.MÖSSMER Einflußfaktoren für die Blaikenerosion auf beweideten und aufgelassenen Almflächen im kalkalpinen Bereich der Landkreise Miesbach und Rosenheim
DM 12.50
- Nr. 64 1985 E.KENNEL Waldschadensinventur Bayern 1984
G.ZWIRGLMAIER DM 20.00 -vergriffen-
- Nr. 65 1985 H.PRETZSCH Wachstumsmerkmale süddeutscher Kiefernbestände in den letzten 25 Jahren
DM 15.00
- Nr. 66 1985 KOLLOQUIUM Forderungen an eine Bundeswaldinventur aus der Sicht von Forst- und Holzwirtschaft
DM 10.00
- Nr. 67 1985 G.ZWIRGLMAIER Struktur und Frühinvalidität der Waldarbeiterschaft der Bayerischen Staatsforstverwaltung
H.LÖFFLER
W.PATZAK
DM 15.00
- Nr. 68 1985 E.REIGBER Forstliche Bioindikatoruntersuchungen
G.BRAUN in Bayern - Methodik und erste Ergebnisse 1981/82 -
DM 20.00
- Nr. 69 1986 G.BRAUN Forstliche Bioindikatoruntersuchungen in Bayern (2) - Die Kombination von Luftbildauswertung und Bioindikatoruntersuchung, dargestellt am Beispiel Oberallgäu 1983 -
E.REIGBER
H.TRÄNKNER
DM 20.00

- | | | | |
|--------|------|---|--|
| Nr. 70 | 1986 | E.KENNEL
A.REITTER | Waldschadensinventur Bayern 1985
DM 12.00 -vergriffen- |
| Nr. 71 | 1986 | R.PLOCHMANN
Ch.HIEKE | Schadereignisse in den Wäldern Bayerns
- Eine Zusammenstellung der forstlichen
Literatur seit Beginn des 18.Jahrhunderts -
DM 15.00 |
| Nr. 72 | 1986 | KOLLOQUIUM | Produktionsziele, Zielsortimente und
Rohholzvermarktung aus der Sicht von
Forst- und Holzwirtschaft
DM 10.00 |
| Nr. 73 | 1986 | R.MÖSSMER | Verteilung der neuartigen Waldschäden an
der Fichte nach Bestandes- und Standorts-
merkmalen in den Bayerischen Alpen
DM 15.00 |
| Nr. 74 | 1986 | R.AMTMANN | Dynamische Windbelastung von Nadelbäumen
DM 20.00 -vergriffen- |
| Nr. 75 | 1986 | Ch.BOSCH | Standorts- und ernährungskundliche Unter-
suchungen zu den Erkrankungen der Fichte
(<i>Picea abies</i> (L.) Karst.) in höheren Ge-
birgslagen
DM 20.00 |
| Nr. 76 | 1986 | H.WEIGER | Experimentelle Untersuchungen in nordbaye-
rischen Nadelwaldbeständen über den
Wasserhaushalt und den Stickstoffeintrag
nach Stickstoffdüngungen
DM 30.00 |
| Nr. 77 | 1987 | K.von GADOW | Untersuchungen zur Konstruktion von Wuchs-
modellen für schnellwüchsige Plantagen-
baumarten
DM 15.00 |
| Nr. 78 | 1987 | U.AMMER
F.FRANZ
H.RÖHLE
K.STUMPF
J.ZANDER | Der Einfluß des Altmühlüberleiters bei
Gunzenhausen auf die Entwicklung des
Artenspektrums, die Vitalität und das
Wachstum der benachbarten Kiefernbestände
DM 17.00 |
| Nr. 79 | 1987 | K.FOERST
U.SAUTER
W.NEUEBURG | Bericht zur Ernährungssituation der Wälder
in Bayern und über die Anlage von Wald-
düngerversuchen
DM 12.00 |
| Nr. 80 | 1987 | KOLLOQUIUM | Die Produktion nachwachsender Rohstoffe
auf bisherigen landwirtschaftlichen
Flächen aus der Sicht von Forst- und
Holzwirtschaft
DM 12.00 -vergriffen- |
| Nr. 81 | 1987 | T.PREUHSLER | Wachstumsreaktionen nach Trassenhieb
in Kiefernbeständen
DM 20.00 |

- Nr. 82 1987 A.KNORR Ernährungszustand, Standortsansprüche und Wuchsleistung der Esche (*Fraxinus excelsior* L.) in Bayern
DM 20.00
- Nr. 83 1987 H.RÖHLE Entwicklung von Vitalität, Zuwachs und Biomassenstruktur der Fichte in verschiedenen bayerischen Untersuchungsgebieten unter dem Einfluß der neuartigen Wald-erkrankungen
DM 15.00
- Nr. 84 1987 W.PHILIPP Die Aufforstung als Beitrag zur Lösung des Überschußproblems in der Landwirtschaft Bayerns
DM 30.00
- Nr. 85 1987 W.WARKOTSCH
R.NEUBERT Untersuchungen zur Erhöhung der Tragfähigkeit von forstlichen Fahrwegen und deren Nachweis mittels dynamischer Verdichtungsprüfung
DM 15.00
- Nr. 86 1988 R.HÜSER
K.-E.REHFUESS Stoffdeposition durch Niederschläge in ost- und südbayerischen Waldbeständen
DM 15.00
- Nr. 87 1988 B.-M.LISS Versuche zur Waldweide - Der Einfluß von Weidevieh und Wild auf Verjüngung, Bodenvegetation und Boden im Bergmischwald der ostbayerischen Alpen -
DM 20.00 -vergriffen-
- Nr. 88 1988 W.PATZAK
H.LÖFFLER Technik und Ökonomie der Langzeitlagerung von Stammholz und Schnittholz
DM 22.00
- Nr. 89 1988 U.PRÖBSTL Auswirkungen des Waldsterbens auf Erholung und Fremdenverkehr in waldreichen Mittelgebirgslandschaften Bayerns
DM 20.00
- Nr. 90 1988 KOLLOQUIUM Anbau schnellwachsender Laubbaumarten in Kurzumtrieben auf landwirtschaftlichen Nutzflächen als Problem von Forst- und Holzwirtschaft
DM 15.00
- Nr. 91 1988 F.STRAUBINGER Untersuchungen zur ertragskundlichen Charakterisierung langfristiger Verjüngungsgänge in Buchen-Eichen-Kiefern - Mischbeständen des Forstamtes Ebrach und zu ihrer Erfassung durch Stichproben
DM 20.00
- Nr. 92 1988 F.FRANZ
H.PRETZSCH Zuwachsverhalten und Gesundheitszustand der Waldbestände im Bereich des Braunkohlekraftwerkes Schwandorf
DM 15.00

- Nr. 93 1988 W.HAUKE Die Geschichte des Schnitzhandwerks und der Waldnutzung in Oberammergau und im Werdenfelser Land im Vergleich zu anderen traditionellen Schnitzlandschaften
DM 30.00
- Nr. 94 1989 E.KENNEL
A.REITTER Waldschadensinventur Bayern
Ergebnisse 1986 und 1988
DM 23.00
- Nr. 95 1989 M.SUDA Stammfäuleschäden im Fichtelgebirge
Inventur, Statistische Analyse und Bewertung von Wurzel- und Wundfäule an Fichte
DM 15.00
- Nr. 96 1989 KOLLOQUIUM Der EG-Binnenmarkt
Chancen und Risiken aus der Sicht von Forst- und Holzwirtschaft
DM 15.00
- Nr. 97 1989 H.UTSCHIG Waldwachstumskundliche Untersuchungen im Zusammenhang mit Waldschäden
Auswertung der Zuwachstrendanalyseflächen des Lehrstuhls für Waldwachstumskunde für die Fichte (*Picea abies* (L.) Karst.) in Bayern
DM 23.00
- Nr. 98 1989 W.NETSCH Entstehung und Umsetzung weiderechtlicher Bestimmungen des Bayerischen Forstrechtesgesetzes (ForG) von 1958
DM 35.00
- Nr. 99 1989 B.-M.LISS Die Wirkung der Weide auf den Bergwald
-Ergebnisse mehrjähriger Untersuchungen-
DM 15.00
- Nr.100 1989 M.FISCHER Schwefel-Vorräte und -Bindungsformen süddeutscher Waldböden in Abhängigkeit von Gestein und atmosphärischer Deposition
DM 25.00
- Nr.101 1990 T.PREUHSLER Einfluß von Grundwasserentnahmen auf die Entwicklung der Waldbestände im Raum Genderkingen bei Donauwörth
DM 13.00
- Nr.102 1990 M.ALCUBILLA
R.HEIBL
K.-E.REHFUESS Langfristige Effekte von Düngungsmaßnahmen auf die chemische Zusammensetzung von Fichtenbast und -holz und ihre Hemmwirkung gegenüber *Heterobasidion annosum* (Fr.) Bref.)
- Ein Beitrag zur Rotfäuleforschung -
DM 21.00
- Nr.103 1990 KOLLOQUIUM Aktivitäten der EG aus der Sicht der deutschen Forst- und Holzwirtschaft
DM 15.00

- Nr.104 1990 J.SCHMIDT Überlegungen zur Erfassung und Beschreibung von Wachstumsgängen am Beispiel der Durchmesserzuwachs-entwicklung der letzten Jahrzehnte von Fichtenaltbeständen in Bayern unter besonderer Berücksichtigung witterungsbedingter Zuwachsreaktionen
DM 23.00
- Nr.105 1990 W.FOERSTER Zusammenfassende ertragskundliche Auswertung der Kiefern-Düngungsversuchsflächen in Bayern - ein Beitrag zur Beschreibung des Kiefernwachstums in Süddeutschland -
DM 29.00
- Nr.106 1990 H.-W.FÜHRER Einflüsse des Waldes und waldbaulicher Maßnahmen auf Höhe, zeitliche Verteilung und Qualität des Abflusses aus kleinen Einzugsgebieten -Projektstudie im Krofdorfer Buchenforst-
DM 30.00
- Nr. 107 1990 H.WEISGERBER Beiträge zur genetischen Variation der Waldbäume und Gefahren der Genverarmung durch Pflanzenzüchtung
DM 29.00
- Nr. 108 1990 K.-R.VOLZ Die staatliche Waldankaufspolitik als Bestandteil der Forstpolitik - Eine Untersuchung am Beispiel der Landesforstverwaltung Baden-Württemberg -
DM 23.00
- Nr. 109 1991 M.WEBER Waldbauliche Untersuchungen zu den neuartigen Waldschäden in jungen Fichtenbeständen Ostbayerns
DM 15.00
- Nr. 110 1991 G.OHRNER Zur Herleitung von Stücklohntarifen in der Holzernte dargestellt am Beispiel der Holzernte in den bayerischen Hochgebirgsforstämtern
DM 27.00
- Nr. 111 1991 H.EL KATEB Der Einfluß waldbaulicher Maßnahmen auf die Sproßgewichte von Naturverjüngungspflanzen im Bergmischwald
DM 23.00
- Nr. 112 1991 J.HAMBERGER Geschichte des Waldes der Stadt Iphofen
DM 23.00
- Nr. 113 1991 KOLLOQUIUM Chancen und Probleme für die Forst- und Holzwirtschaft im geeinten Deutschland
DM 15.00

- Nr. 114 1991 U.SAUTER Versuche zur Wirkung von sulfatisch, carbonatisch und silikatisch gebundenem Magnesium auf Ernährungszustand und Wachstum junger Fichten, chemischen Bodenzustand und Sickerwasserbefruchtung DM 33.00
- Nr. 115 1992 H.PRETZSCH Konzeption und Konstruktion von Wachstumsmodellen für Rein- und Mischbestände DM 30.00
- Nr. 116 1992 H.WOLF Untersuchungen zur genetischen Variation des Monoterpenmusters im Nadelharz der Weißtanne (*Abies alba* Mill.) DM 23.00
- Nr. 117 1992 A.K.KHATTAK Development of a model forest management plan for the Panjul forest in Western Himalaya (Pakistan) DM 23.00
- Nr. 118 1992 A.HANTGE Eignung der Isozymmuster von Peroxidase, Superoxid-Dismutase und Saurer Phosphatase aus Nadeln der Fichte (*Picea abies* (L.) Karst.) zur Indikation von Schadstoffeinflüssen DM 23.00
- Nr. 119 1992 F.BINDER Aufforstung in Waldschadensgebieten - Untersuchungen zur künstlichen Verjüngung von Beständen im Frankenwald, Fichtelgebirge und in den Bayerischen Kalkalpen - DM 25.00
- Nr. 120 1992 G.HEISS Erfassung und Bewertung großflächiger Waldgebiete zum Aufbau eines Schutzgebietssystems in der Bundesrepublik Deutschland DM 47.00 - vergriffen -
- Nr. 121 1992 KOLLOQUIUM Die Waldbesitzstruktur in Deutschland als Problem der Forst- und Holzwirtschaft DM 13.00
- Nr. 122 1992 H.WERNER Das Indigopapier - Sensitives Element zum Aufbau von Passivsammelern zur Messung von Ozonimmissionen DM 23.00
- Nr. 123 1992 S.AMMER Auswirkungen experimenteller saurer Beregnung und Kalkung auf die Lumbricidenfauna und deren Leistungen (Höglwaldexperiment) DM 25.00

- Nr. 124 1992 M.FREIST-DORR Struktur und Wachstum süddeutscher Trauben-Eichen-Buchen-Mischbestände Darstellung am Beispiel langfristig beobachteter Versuchsflächen
DM 25.00
- Nr. 125 1992 R.MÖßMER
F.-J.MAYER
H.TRÄNKNER
M.SCHUSTER
A.GREUNE
A.BÄUMLER Erhebung des Waldzustandes in Bayern 1989 bis 1991
Landesweite terrestrische Erhebung, Luftbilder, Dauerbeobachtungsflächen
DM 23.00
- Nr. 126 1993 P.BURSCHEL
E.KÜRSTEN
B.C.LARSON Die Rolle von Wald und Forstwirtschaft im Kohlenstoffhaushalt - Eine Betrachtung für die Bundesrepublik Deutschland
DM 21.00
- Nr. 127 1993 KOLLOQUIUM Perspektiven für Angebot und Nachfrage auf den Industrieholzmärkten
DM 13.00
- Nr. 128 1993 A.BRUNNER Die Entwicklung von Bergmischwaldkulturen in den Chiemgauer Alpen und eine Methodenstudie zur ökologischen Lichtmessung im Wald
DM 27.00
- Nr. 129 1993 R.KOTRU Structure and developmental dynamics of natural spruce (*Picea smithiana* (Wall.) Boissier) -silver fir (*Abies pindrow* Royle) forests in the Indian Northwestern Himalayas under varying degrees of human impact
DM 25.00
- Nr. 130 1993 W.KOCH Langjähriger Reinluft/Standortsluft-Vergleich des Gaswechsels von Fichte unter Freilandbedingungen - Ein Beitrag zur Waldschadensforschung -
DM 11.00
- Nr. 131 1993 A.FUCHS Wiederholungsaufnahme und Auswertung einer permanenten Betriebsinventur im Bayerischen Forstamt Ebrach
DM 23.00
- Nr. 132 1993 H.-J.GULDER
M.KÖLBEL Waldbodeninventur in Bayern
DM 25.00
- Nr. 133 1993 Ch.KÖLLING Die Zusammensetzung der Bodenlösung in sturmgeworfenen Fichtenforst (*Picea abies* (L.) Karst.) - Ökosystemen
DM 21.00
- Nr. 134 1993 B.FELBERMEIER Der Einfluß von Klimaänderungen auf die Areale von Baumarten Methodenstudie und regionale Abschätzung für die Rotbuche (*Fagus sylvatica* L.) in Bayern
DM 25.00

- Nr. 135 1993 H.-G.MICHIELS Die Stellung einiger Baum- und Straucharten in der Struktur und Dynamik der Vegetation im Bereich der hochmontanen und subalpinen Waldstufe der Bayerischen Kalkalpen
DM 27.00
- Nr. 136 1994 KOLLOQUIUM Rohholzabsatz als Organisationsproblem
DM 17.00
- Nr. 137 1994 E.GUNDERMANN
K.-R.VOLZ Forum Forstgeschichte
Ergebnisse des Arbeitskreises
Forstgeschichte in Bayern 1994
DM 15.00
- Nr. 138 1994 J.GUTTENBERGER Energetische Bedingungen für die Schnee-
verdunstung im Wald und im Freiland
DM 33.00
- Nr. 139 1994 C.HOFMANN
H.FISCHER
K.-E.REFUESS Bodenkundliche und hydrologische
Untersuchungen in den Hochlagen des
Inneren Bayerischen Waldes - Ein Beitrag
zur Aufklärung der montanen Vergilbung
von Fichtenbeständen -
DM 34.00
- Nr. 140 1994 E.-M.MÖSSMER
U.AMMER Pioniereigenschaften von Gehölzen in
schneegleitgefährdeten Schutzwaldlagen
im montanen und subalpinen Bereich der
Bayerischen Kalkalpen
DM 21.00
- Nr. 141 1994 M.KAHN Modellierung der Höhenentwicklung
ausgewählter Baumarten in Abhängigkeit
vom Standort
DM 33.00
- Nr. 142 1994 H.LÖFFLER
MESSE MÜNCHEN
GMBH 7.Internationaler Kongreß
Interforst Juli 1994.
Wald und Holz im Dienst der Umwelt
DM 33.00
- Nr. 143 1994 M.SUDA
E.GUNDERMANN Auswirkungen und monetäre Bewertung
von Wildschäden im Bereich wasser-
wirtschaftlicher Sanierungsflächen
des Bayerischen Alpenraumes
DM 32.00
- Nr. 144 1994 M.SCHMITT Waldwachstumskundliche Untersuchungen
zur Überführung fichtenreicher Baum-
hölzer in naturnahe Mischbestände mit
Dauerwaldcharakter
DM 34.00

- Nr. 145 1994 E.-M.MÖSSMER
U.AMMER
T.KNOKE Technisch-biologische Verfahren
zur Schutzwaldsanierung in den
oberbayerischen Kalkalpen
DM 21.00
- Nr. 146 1994 U.AMMER
A.FISCHER
R.MÖSSMER
H.UTSCHICK Das Seeholz bei Diessen am Ammersee
- Pflege- und Entwicklungsplanung
für ein walдреiches Naturschutzgebiet -
DM 53.00
- Nr. 147 1995 KOLLOQUIUM Marketing für Forst- und Holzprodukte
Bestandsaufnahme und Perspektiven
DM 15.00
- Nr. 148 1995 H.BREINLINGER Wavelet-Transformation und Neuronale
Netze als Verfahren der Digitalen Signal-
verarbeitung für forstwissenschaftliche
Anwendungen
DM 20.00

Zu beziehen über die Universitätsbuchhandlung Heinrich Frank,
Schellingstr. 3, D - 80799 München

