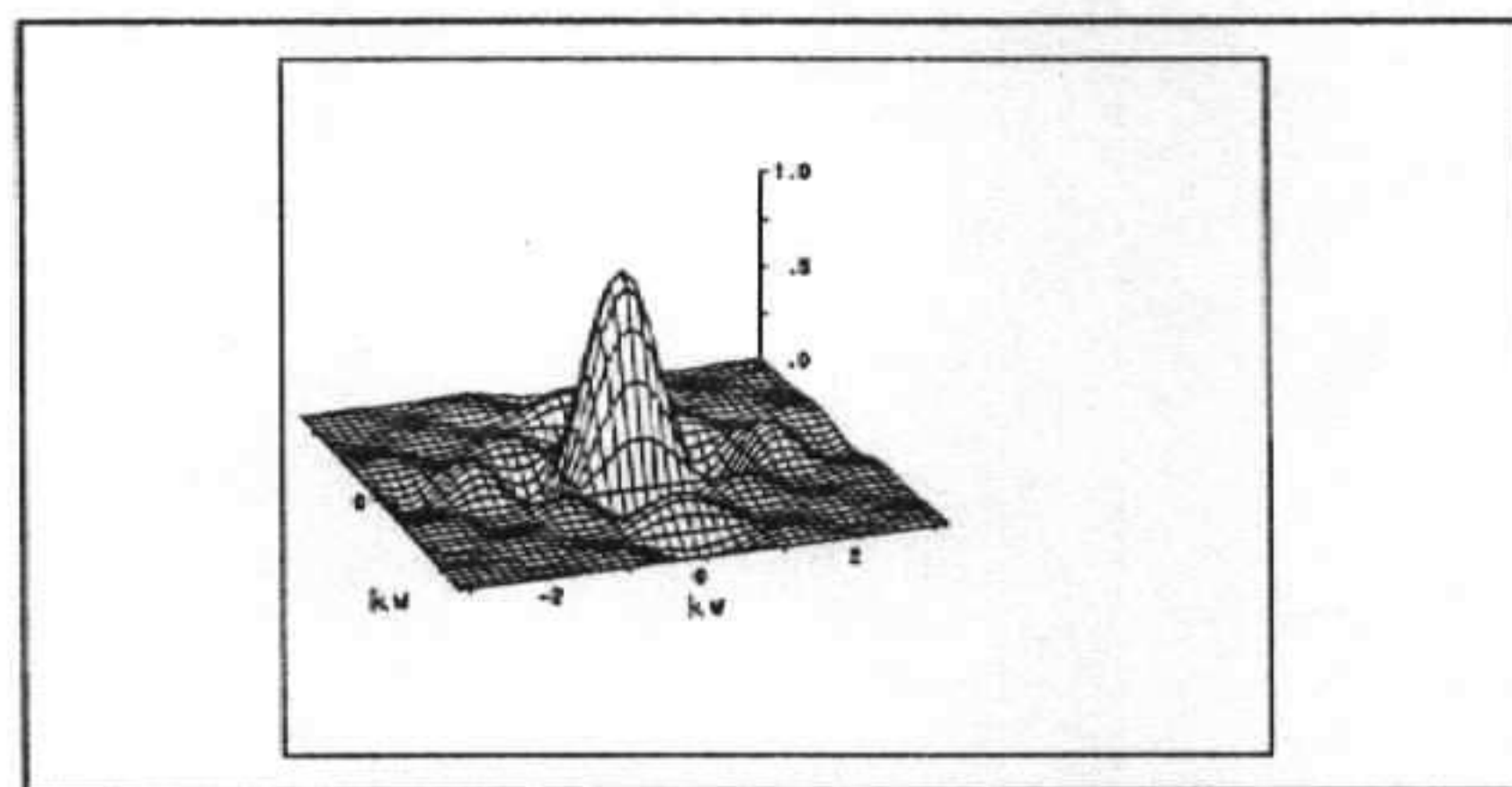


Algorithmen zur 2-dimensionalen digitalen Signal- und Bildverarbeitung unter OCCAM



als

Diplomarbeit

der Forstwissenschaftlichen Fakultät

der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von

Heinz BREINLINGER

Freising, im Juli 1993

Themenbearbeitung am Lehrbereich für Biometrie und Angewandte Informatik

Leiter der Arbeit: Prof. Dr. Quednau

Inhalt

Einleitung	1
Übersicht	5
Digitale gerade Segmente.	6
Konvolution (Faltung)	11
Komplexe Schwingungsgleichungen	15
Fourieranalyse	17
Fast-Fourier-Transform	22
Masken und Filter	25
Einfache Übertragungsfunktionen zur Bildverbesserung	32
Ein Ansatz zur Texturanalyse	35
Diskussion	41
Literatur	45
Anhang A: Programmbeispiel zur FAST-FOURIER-TRANSFORM unter OCCAM	48
Anhang B: 1 3.5" Diskette OCCAM-Code	

Einleitung

Eine zunehmend automatisierte Verarbeitung großer Datenmengen aus der Fernerkundung mit nachrichtentechnischen Algorithmen bildet für zukünftige komplexe Anwendungen eine unabdingbare Voraussetzung auf den Gebieten Signalverarbeitung und Merkmalsextraktion.

Bisherige Segmentierungsansätze über Indexbildung einer Vielzahl von Rückstrahlungsmessungen verschieden empfindlicher Sensoren reduzieren den komplexen Merkmalsraum eines Objektes jedoch stark vereinfachend auf dessen globale Rückstrahlungseigenschaften.

Die Lösung dieses Problemes kann ebensowenig in einer Vervielfachung immer feinerer Sensoren und steter Erhöhung des Meßaufwandes begründet liegen wie etwa das visuelle System des Menschen ein Objekt allein aufgrund des Farbwertes "Grün" als Baum klassifizierte.

Diese Vorgehensweise, welche lediglich für die großräumige Satellitenfernerkundung noch einige Zeit bevorzugtes Mittel der Wahl bleiben dürfte, bildet hingegen meist das gesamte mathematische Modell forstwissenschaftlicher Luftbilddauswertungen. Eine Schwarz-Weiß-Aufnahme mit aller für die menschliche Objekterkennung ausreichenden Texturinformation wäre für den Signaturanalytiker somit letztlich wertlos.

Als optimierbare, verfahrensimmanent aber schwer zu lösende und seit langer Zeit bekannte Probleme dieser Beschränkung auf die Spektralanalyse gelten :

- kleinräumig schwankende Beleuchtungsverhältnisse
- radiometrische Eichung, bzw. Normung und Standardisierung des Filmmateriales
- atmosphärische Extinktion
- Abhängigkeit der Abstrahlung von Jahreszeit und Witterung
- hohe Mischpixelanteile
- schlechte Abstrahlung von Waldgebieten (dunkle Fichtenforste)

- Reziprozität von Meßkanalzahl und Auflösung hochfliegender Trägersysteme nur bei großflächig homogenen Arealen praktikabel; kleinräumige Ansprache hingegen kaum möglich
- Klassifikationen oft nur unter akademisch idealisierten Bedingungen und hohem Aufwand (Kanalzahl, Ground-Truth-Begänge, Verschneidung mit topographischen Karten) brauchbar
- schlechte Trennbarkeit der Cluster bei Bodenvegetation und niederem Bestockungsgrad

Für die vergleichsweise großmaßstäblichen Luftbilder mit ihren wesentlich feinerstrukturierten Objekten komplexer Texturen und je nach Aufnahmeparametern stark variierenden Oberflächenstrukturen ist eine für die Forstpraxis verwertbare Klassifizierung über pixelweise Signaturanalyse allein in aller Regel kaum durchführbar.

Bereits KOCH et.al.(1990), sowie KUEBLER et.al.(1990) weisen in ihren Untersuchungen auf die besonderen Schwierigkeiten schwankender Meßbedingungen durch Variation von Sonnenstand, Jahreszeit, Untergrund, Bestockungsgrad, Baumartenanteilen und Blüheffekte hin.

Die angeführten Hindernisse können bei Bescheidung auf größerräumige Erfassung weithin gleichartiger Flächen nach dem Gesetz der großen Zahl etwas eingeebnet werden; eine detaillierte Ansprache jedoch ist kaum möglich. Hier müssen andere Ansätze zum Tragen kommen.

Die Fourieranalyse als Fundament der 2-dimensionalen Digitalen Signalverarbeitung stellt in Nachrichtentechnik wie Informatik neben einfachen texturanalytischen Methoden eines der wichtigen mathematischen Verfahren dar. Als Grundmodell der Nachrichtentechnik ist sie Gegenstand einer Vielzahl von Klassifikationsansätzen in den Bereichen Bildmuster- und Spracherkennung.

So beruhen die meisten Modelle maschinellen Sehens der angestammten Wissenschaftszweige Informatik und Robotik ebenso wie die höherentwickelten phasenempfindlichen Systeme biologischen Sehens auf texturellen Eigenschaften, wobei gerade die primitive Vorverarbeitung von Signalen im Auge heute zunehmend als Analogon diverser aus der

Nachrichtentechnik bekannter Filtertechniken gesehen wird.

Der Wunsch nach einer mathematisch adäquaten Beschreibung forstlich interessierender Luftbildmuster wie etwa

- mit Bäumen bestandene Flächen diversen Bestockungsgrades
- Einzelkrone
- Bestandestyp
- Totholz
- Sturmwurf

in der Fernerkundung gewinnt mit den stetig wachsenden Anforderungen an Datendurchsatz und Komplexität bei hohen Personalkosten für Routinetätigkeiten zunehmend an Gewicht, während die theoretischen Grundlagen der Signalverarbeitung als Voraussetzung einer Merkmalsextraktion und Automatisierung im forstlichen Bereich oft unzureichend bekannt sind.

Eine erste Einführung in diese Techniken und ihre algorithmische Umsetzung ist daher Thema vorliegender Arbeit, deren Textteil mathematische Referenz und theoretische Grundlage der auf einem Transputer realisierten Signalverarbeitungsmodule darstellt.

Die 3-dimensionalen Abbildungen entstanden als FORTRAN-Programme mit Modulen des LRZ-Graphiksystemes.

Alle im folgenden besprochenen Algorithmen wurden auf einer Stand-Alone-TRANSPUTER-Host-Konfiguration und Grundsoftware der Firma KASCH-SYSTEMTECHNIK in OCCAM 2 unter TDS 3 (Transputer-Development-System 3) implementiert und können beiliegender 3.5"-Diskette als Quellcode entnommen werden. Die einzelnen Verzeichnisse entsprechen hierbei dem thematisch modularen Aufbau der Benutzeroberfläche des Programmes und enthalten jeweils ein README-File, welches die Prozeduren knapp kennzeichnet, so daß auch einfache und daher im vorliegenden Text nur benannte Basisalgorithmen leicht zuzuordnen sind.

Das Wort "Transputer" ist eine Synthese der Begriffe 'Transistor' und 'Computer'.

1986 entwickelte die Firma INMOS mit Blickrichtung auf Multiprozessornetzwerke den damals weltschnellsten RISC-Mikroprozessor, der neben leistungsfähigen Chipbestandteilen mit On-Chip-RAM und 4 Kommunikationsschnittstellen einen kleinen Computer in einem einzigen hochintegrierten Bauteil vereint. Die enge Kopplung von CPU und FPU (Floating Point Unit) bei möglicher zeitgleicher Ausführung von Arithmetik und Adressierungsbefehlen ergab höhere Rechengeschwindigkeiten als die übliche Chip-Paarung Prozessor/Coprozessor.

Transistorartige Verknüpfung vieler Transputer über sogenannte 'Links' ermöglicht unter der auf die spezielle Rechnerarchitektur ausgerichteten Programmiersprache OCCAM 2 die parallele Steuerung autonomer untereinander kommunizierender Prozesse mit vielfältigem Austausch von Daten und Steuerbefehlen nach MIMD-Prinzip (Multiple Instruction - Multiple Data).

Bei rechenaufwendigen, parallelisierbaren Algorithmen, wie sie etwa bei mehrdimensionalen Fourier-Transformationen gegeben sind, lassen sich so deutliche Geschwindigkeitsvorteile erzielen.

Entsprechend besteht z.B. das deutsche Modell eines Teraflop-Rechners der Firma PARSYTEC aus 65536 modifizierten T9000-Transputern.

Die Sprache OCCAM 2 stellt in Anlehnung an den mittelalterlichen Philosophen "Occam", dessen Weltanschauung den Verzicht unnötiger Existenzannahmen forderte, ein logisches Minimalkonstrukt strenger Syntax dar, welches aufgrund enger Hardware-Ausrichtung sehr effizienten Code erzeugt, so daß auch Stand-Alone-Transputer mit ihrer VLSI-Architektur (hochintegrierte Schaltkreise) für die Bildverarbeitung besonders geeignet sind. Die Entwicklung der Programmiersprache und des zugehörigen Mikroprozessors waren eng verzahnt und beeinflussten sich wechselseitig, woraus eine enge Verwandtschaft von Hardware und prozessoreigener Programmiersprache entstand. Durch parallel wie sequentiell modular verknüpfbare Konstrukt-Primitive jedweder Hierarchie neben Inline-Assemblierung und wesentlichen Kontrollstrukturen einer Hochsprache ergibt sich die besondere Eignung von OCCAM 2 für die Anwendungs- wie Systemprogrammierung.

Übersicht

Nach einer ersten Einführung in die digitale Geometrie anhand eines Streckenalgorithmus in **"Digitale gerade Segmente"** leitet **"Konvolution"** die Faltungsoperation als Beschreibung des Spaltübertragungsverhaltens ab und verallgemeinert ihre Bedeutung anhand der Beispiele Bildaufnahme und Digitalisierung .

Ausgehend von den Grundlagen aus **"Komplexe Schwingungsgleichungen"** behandelt **"Fourieranalyse"** im weiteren die Entwicklung von Funktionen nach einem Orthonormalsystem und geht auf die algorithmischen Besonderheiten der "Diskreten Fouriertransformation" ein.

Die Mathematik der "schnellen Fouriertransformation" (FFT) schließlich ist Gegenstand von **"Fast Fourier Transform"**, während **"Masken und Filter"** mit Hilfe der Orts- - Wellenraum-Korrespondenz von Faltung und Multiplikation verschiedene Transferfunktionen mit ihren Eigenschaften vorstellt.

Nach Verfahren zu Rauschunterdrückung und Kontrastanhebung in **"Einfache Übertragungsfunktionen ..."** zeigt **"Ein Ansatz ..."** exemplarisch eine mögliche methodische Vorgehensweise zur Texturanalyse und ihre Problematik anhand des Verfahrens von GRANLUND (1978) auf.

Digitale gerade Segmente

Die Besonderheiten einer Digitalen Geometrie sollen zur Einführung in die Thematik beispielhaft am Detektions-Problem des sogenannten "Digitalen geraden Segmentes" (Zamperoni 1991) veranschaulicht werden.

Die mathematische Beschreibung allgemeingültiger Charakteristika einer der euklidischen Distanz bestmöglich angenäherten Verbindungsstrecke zweier Punkte auf einem diskreten Raster ist Grundlage eines Erkennungsalgorithmus.

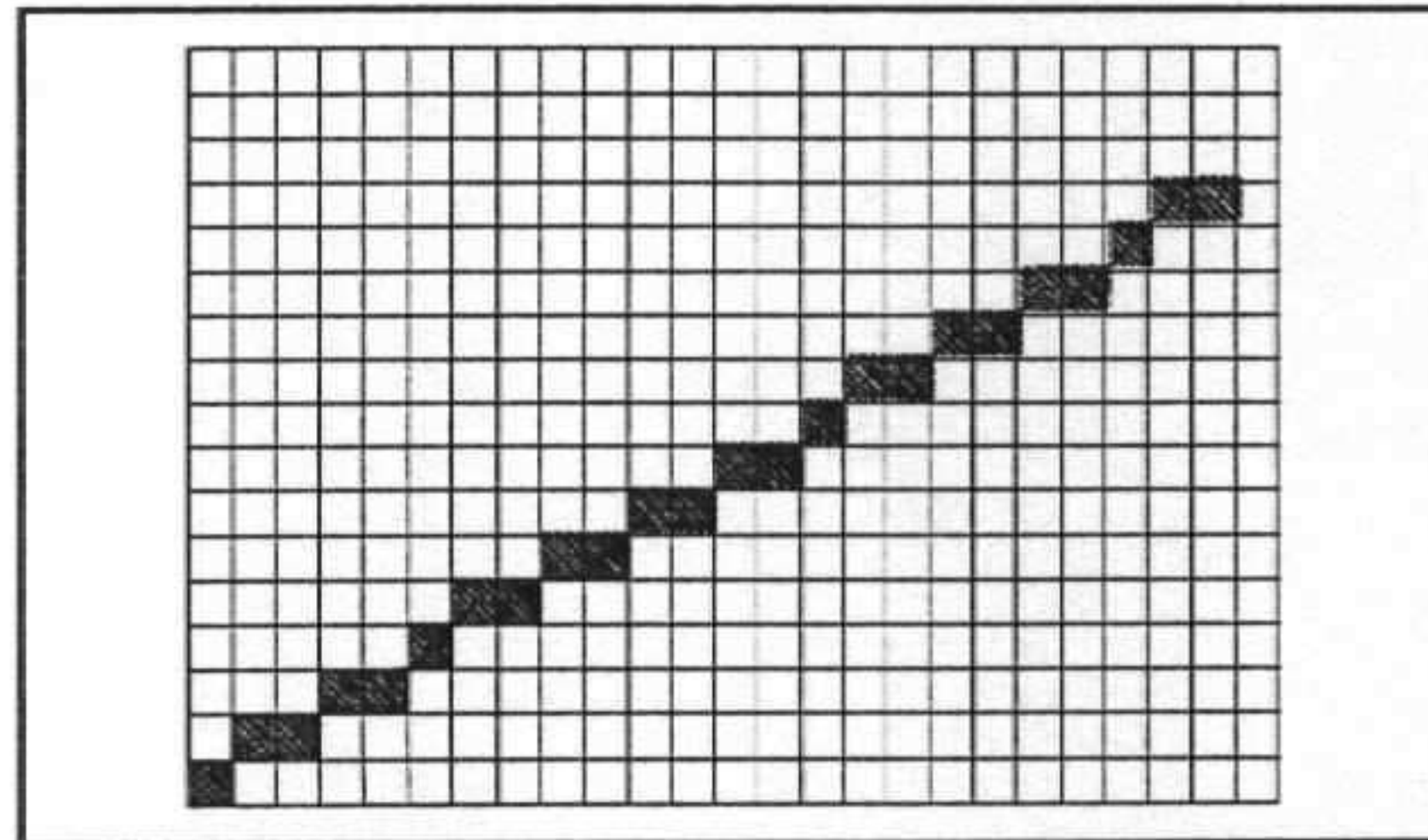
Zum besseren Verständnis eines Verfahrens des Autors zur Berechnung Digitaler Gerader Segmente (DGS) bei vorgegebenen Begrenzungspunkten soll nach einer kurzen Erläuterung des Konturcodes zunächst ein Algorithmus zur Erkennung eines DGS aus Zamperoni (91) vorgestellt werden.

Die Konturcodierung ermöglicht die digitale Beschreibung der Umrißlinie eines Binärobjektes als Integerfolge, deren Elemente den 8 Schrittrichtungen ausgehend vom Zentrum der Maske

3	2	1
4		0
5	6	7

analog sind. Auf die besondere Eignung dieses Verfahrens zur Kurvenglättung, Inhaltsberechnung, Rotation und Formanalyse sei hier am Rande verwiesen.

Folgende Abbildung



K_0 : 10101101010101101010110

K_1 : 1 1 2 1 1 1 2 1 1 2

K_2 : 2 3 2

K_3 : 1 1 $\Rightarrow$ DGS

zeigt einen Pfad zwischen 2 Begrenzungspunkten und seine Konturcodierung, welche in einem rekursiven Algorithmus auf Übereinstimmung mit folgender Definition eines DGS geprüft werden soll.

- A Die Folge darf aus maximal 2 verschiedenen Elemente b_0 und b_1 mit $|b_0 - b_1|_{\text{mod}8} = 1$ bestehen.
- B Das seltenere Element darf nur einzeln vorhanden sein.
- C b_0 und b_1 sollen so homogen wie möglich verteilt sein.

Die umgangssprachliche Formulierung aus Punkt C wird nun in einer Weise präzisiert, die gleichzeitig die rekursive Natur des Detektions-Algorithmus verdeutlicht.

Seien K_i die Konturfolge des zu i gehörigen Schleifendurchganges und δ_i die Anzahl verschiedener Elemente in K_i .

$i=0$

LOOP: Prüfe Bedingungen A und B in K_i

IF NOT (A und B)

--> kein DGS, exit

ELSE

$i:=i+1$

Bilde eine neue Konturkette K_i , deren Elemente die

Längen des häufigeren Schrittes aus K_{i-1} repräsentieren.

Ermittle delta.

IF (delta = 1)

--> DGS , exit

ELSE

$i++$

GO TO LOOP

END LOOP

Die mathematische Konkretisierung von Punkt C besteht also in der Forderung, daß in jeder Hierarchiestufe K_i die jeweils seltenere Ziffer als Konturschritt oder kürzeres Intervall des in K_{i-1} häufigeren Elementes nur einzeln vorkommen darf und stützt sich somit auf eine Verallgemeinerung von Punkt B.

Die Umkehrung dieses Problemes besteht in der Suche eines allgemeingültigen Algorithmus, der für alle denkbaren Punktpaare der Bildmatrix ein DGS erstellt, welches dem Betrachter als bestmögliche Approximation der euklidischen Verbindung erscheint.

Für die Implementation wurde folgende Vorgehensweise gewählt:

Aus den jeweiligen Koordinatendifferenzen der Begrenzungspunkte bezüglich Abszisse und Ordinate werden aus dem Arcus-Tangens ihres Quotienten die Konturschritte $b_j^{(0)}$

($j=0,1$), sowie deren Vielfachheiten $v_j^{(0)}$ ermittelt.

Eine harmonische Verteilung der $b_j^{(0)}$ in der Zielkette erfolgt über hierarchische Ebenen E_k ($k = 0,1,2,\dots$) von Teilkettenpaaren, deren letzte erreicht ist, sobald die Vielfachheiten $v_j^{(k)}$ der beiden Teilketten $b_j^{(k)}$ auf ein einfaches Harmonisierungsproblem zurückgeführt werden können.

Ein solch einfaches Problem ist genau dann gegeben, wenn eine Teilkette die Vielfachheit 0 oder 1 besitzt oder die Differenz $|v_0^{(k)} - v_1^{(k)}|$ der beiden Vielfachheiten 0 oder 1 beträgt.

Bezeichne der Index max (min) die längere (kürzere), der Index h (s) die häufigere (seltener) Teilkette so ergeben sich die $b_j^{(k)}$ mit $k = \{1,2,3,\dots\}$ unter Verwendung der Hilfsgröße $c_{\max,\min}$ und gegebenen $b_{h,s}^{(0)}, v_{h,s}^{(0)}$ unter Beachtung der Regeln für die INTEGER-Division rekursiv in folgender Weise:

$$c_{\min}^{(k)} = v_h^{(k-1)} / v_s^{(k-1)}$$

$$c_{\max}^{(k)} = c_{\min}^{(k)} + 1$$

$$v_{\max}^{(k)} = v_h^{(k-1)} - v_s^{(k-1)} \cdot c_{\min}^{(k)}$$

$$v_{\min}^{(k)} = v_s^{(k-1)} - v_{\max}^{(k)}$$

$$b_{\max}^{(k)} := \left\{ \left\{ b_h^{(k-1)} \right\}_{c_{\max}}, \left\{ b_s^{(k-1)} \right\}_1 \right\}_1$$

$$b_{\min}^{(k)} := \left\{ \left\{ b_h^{(k-1)} \right\}_{c_{\min}}, \left\{ b_s^{(k-1)} \right\}_1 \right\}_1$$

$\left\{ x \right\}_n$ bezeichne einen Vektor aus n Elementen x .

Für die Begrenzungspunkte des Beispiels erhält man beginnend mit $b_{0,1}^{(0)}, v_{h,s}^{(0)}$ folgende

Teilkettenpaare und Vielfachheiten:

$$E_0: \left\{ 1 \right\}_{13}, \left\{ 0 \right\}_{10}$$

$$E_1: \left\{ 1,1,0 \right\}_3, \left\{ 1,0 \right\}_7$$

$$E_2: \left\{ 10,10,110 \right\}_2, \left\{ 10,10,10,110 \right\}_1$$

Aus dem nun vorliegenden einfachen Harmonisierungsproblem folgt mit

$$E_3: \left\{ 1010110, 101010110, 1010110 \right\}_1 \text{ die bestmögliche Annäherung an eine Gerade durch A und B .}$$

Prozedur: **DGS**

Konvolution (Faltung)

Wegen seiner grundlegenden Bedeutung für die Signalverarbeitung soll der Begriff des Faltungintegrals anhand der mathematischen Beschreibung eines zunächst eindimensionalen Bildaufnahmesystems veranschaulicht werden.

Sei das zu übertragende Signal eine Schwingung $f(t) = \cos(kt)$ mit Kreisfrequenz k , das Übertragungssystem ein ein gleitend darüber geführter Spalt der Breite s und einer Transmission

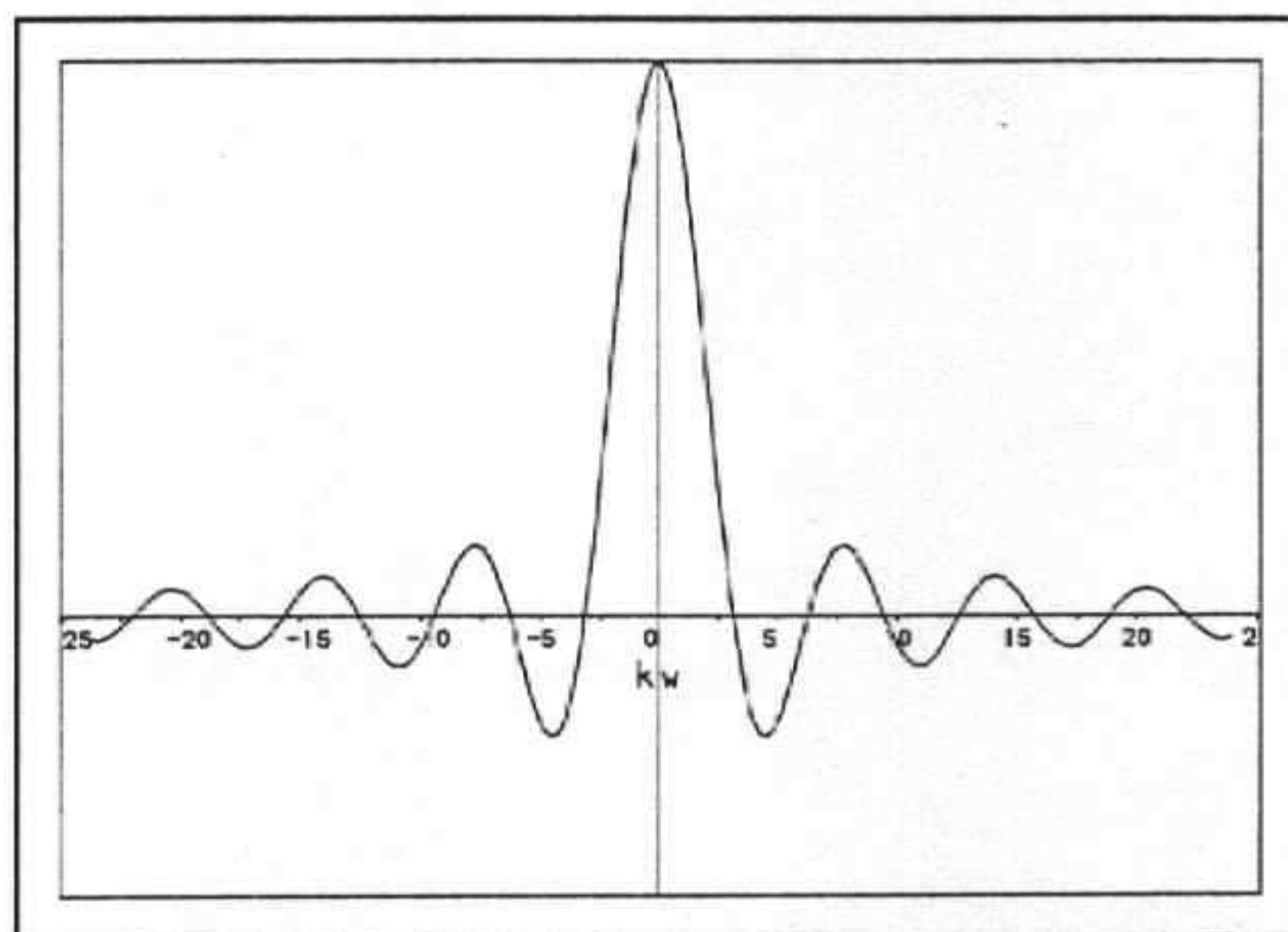
$$m(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & ; -\frac{s}{2} \leq t \leq \frac{s}{2} \\ 0 & ; \text{sonst} \end{pmatrix}$$

,also ein Rechteckimpuls mit zur Breite reziproker Höhe, so ergibt sich für jedes t_s im Zentrum des Spaltes als Transmission

$$f^1(t_s) = \frac{1}{s} \int_{t_s - \frac{s}{2}}^{t_s + \frac{s}{2}} \cos(kt) dt = \frac{\sin\left(\frac{ks}{2}\right)}{\frac{ks}{2}} \cos(kt_s)$$

$$:= \text{SINC}\left(\frac{ks}{2}\right) \cos(kt_s)$$

$$\text{mit } \text{SINC}(0) := s$$



SINC-FUNKTION

Die resultierende Glättung, bzw. Phasenumkehr des Originals ist demnach eine alleinige Funktion von Eingangsfrequenz und Spaltbreite, die wegen ihrer allgemeinen Bedeutung unter dem Namen SINC-Funktion Eingang in die Signalverarbeitung gefunden hat. Ihre besondere Verbindung mit der Mathematik des Wellenraumes als charakteristische Frequenzantwort einfacher Filtermasken wird später gezeigt werden.

Obiges Modell soll nun bei gleicher Notation durch die Annahme erweitert werden, der Spalt habe keine über eine beschränkte Breite konstante Transmission, sondern ein Übertragungsverhalten $g(x)$. Für jedes t_s erhalten wir jetzt als Transmission

$$\begin{aligned} f^2(t_s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t_s - \xi) \cos(k \xi) d\xi \\ &= g(t) * \cos(t) \end{aligned}$$

die sogenannte Faltung oder Konvolution (Symbol $*$) des Eingangssignals mit einer wichtenden Spaltfunktion durch Integration über den gesamten Bereich.

Die Übertragung des Faltungsintegrals auf die 2-dimensionale Signalverarbeitung lautet entsprechend

$$\begin{aligned} f^{(')} (t_{s1}, t_{s2}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_{s1} - \xi_1, t_{s2} - \xi_2) f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ &= g(\xi_1, \xi_2) * f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

Die Konvolution der Bildaufnahme bewirkt demnach eine Einebnung, bzw. Phasenverschiebung des Urbildes.

Die eigentliche Diskretisierung (Digitalisierung) ergibt sich nun als Faltung der stetigen geglätteten Funktion $f^{(')} (t_1, t_2)$ mit einem Diracfeld oder 2-d Deltakamm

$$d(t_1, t_2; \Delta t_1, \Delta t_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \delta(t_1 - m_1 \Delta t_1, t_2 - m_2 \Delta t_2)$$

m_i ($i = 1, 2$) ganze Zahlen

$\Delta t_i (i=1, 2) = \text{Abstände der Gitterpunkte}$

zu

$$f^{(')} (t_1, t_2) = f^{(')} (t_1, t_2) * d(t_1, t_2; \Delta t_1, \Delta t_2)$$

'*' bezeichnet hier die Faltung

Der Deltakamm ist die Übertragung der bekannten Dirac'schen Deltafunktion

$$\delta(t-m) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(t-m)^2}$$

m Konstante

in die 2. Dimension mit der Eigenschaft

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} \delta(t_1-m_1, t_2-m_2) dt_1 dt_2 = 1$$

und der sogenannten Ausblendung

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty \infty} f^{(\cdot)}(t_1, t_2) \delta(t_1-m_1, t_2-m_2) dt_1 dt_2 = f^{(\cdot)}(m_1, m_2)$$

m_i (i = 1,2) Konstanten

welche das für die Beschreibung der Digitalisierung wesentliche Moment darstellt.

Das Ergebnis dieser etwas abstrakten Einführung bildet als geglättetes, diskretisiertes Original die weitere Verarbeitungsgrundlage im Orts- und Wellenraum.

Die Faltung von Rechteckimpuls und Urbild wurde der Thematik folgender Kapitel vorausgreifend als Multiplikation des Bild-Fourierspektrums mit der optischen Transferfunktion des Rechteckimpulses implementiert und verdeutlicht die Dämpfung der periodischen Strukturen, sowie die wechselseitige Orts- Wellenraumentsprechung von Konvolution und Multiplikation, die an dieser Stelle unter Verweis auf folgende Kapitel bereits erwähnt sei.

Prozedur: **FREQDOMAIN**

Bildfilterung mit 2-d-SINC-Funktion im Wellenraum

Komplexe Schwingungsgleichungen

Seien $j := i^{(-0.5)}$, ω die Kreisfrequenz und $A \in \mathbb{R}$; $a, z \in \mathbb{C}$,
so läßt sich die komplexe Schwingung

$$z(t) = a e^{j(\omega t + \alpha)}$$

mit

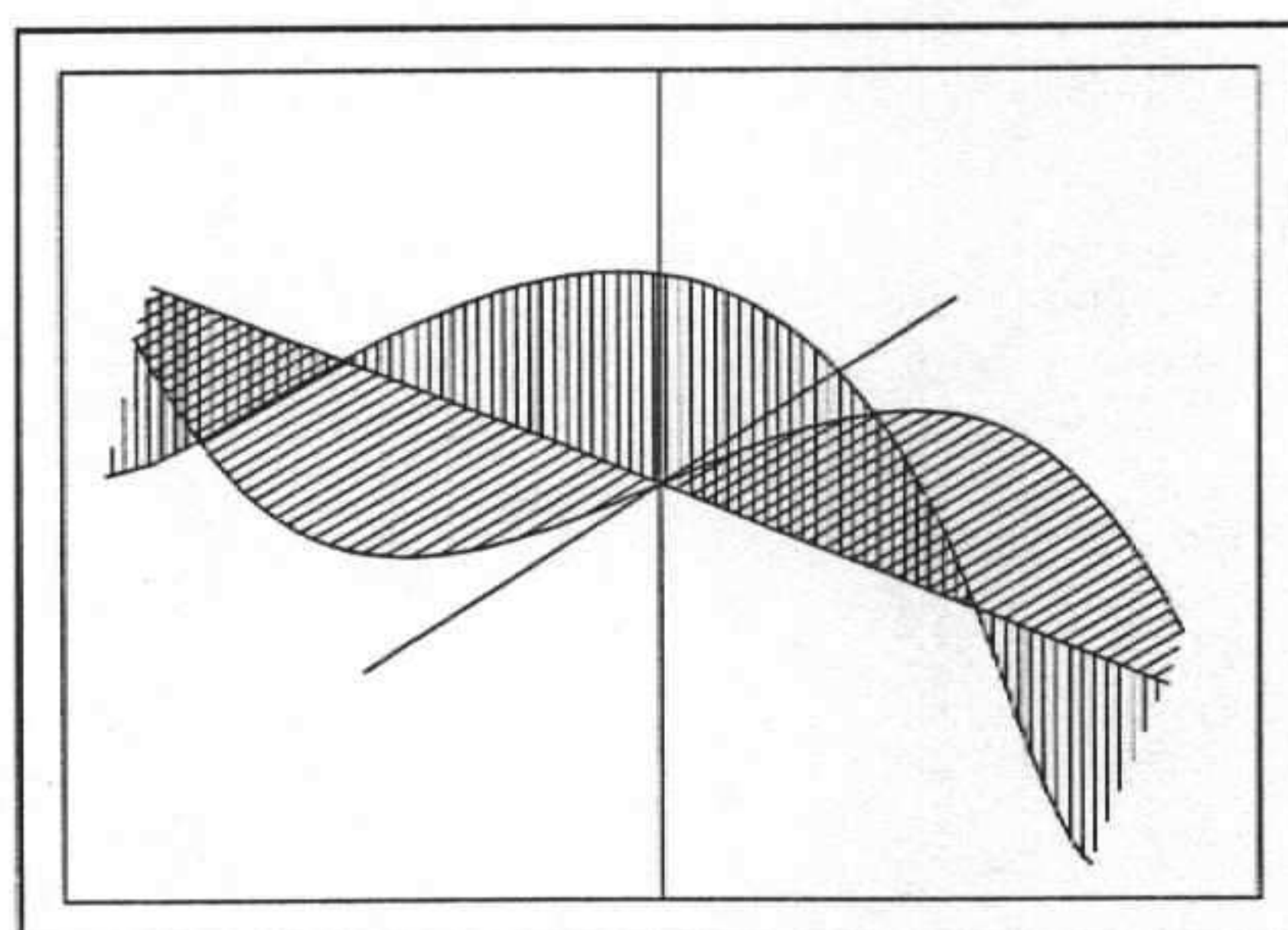
$$a = A e^{j\alpha}$$

unter Anwendung der Euler-Formel

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

zerlegen in

$$z(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + j A \sin(\omega t + \alpha)$$



REAL- UND IMAGINÄRTEIL EINER KOMPLEXEN SCHWINGUNG

Die komplexe Amplitude a beinhaltet somit neben der reellen Amplitude auch die Nullphase der Schwingung und vereinfacht damit ihre mathematische Handhabung.

Die Symmetrieeigenschaften

$$\cos(\varphi) = \cos(-\varphi) \quad \textit{geradeFunktion}$$

$$\sin(\varphi) = -\sin(-\varphi) \quad \textit{ungeradeFunktion}$$

bilden die Grundlage der im weiteren vorgestellten Entwicklung stückweise stetiger Funktionen in gerade Real-, bzw. ungerade Imaginärteile nach Fourier.

Fourieranalyse

Jede Funktion $f(t)$ ist darstellbar als Summe

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$$

einer geraden Funktion $f_g(t)$ und einer ungeraden Funktion $f_u(t)$ mit

$$f_g(t) : \quad f_g(t) = f_g(-t)$$

$$f_u(t) : \quad f_u(t) = -f_u(-t)$$

und

$$f_g(t) = \frac{1}{2} (f(t) + f(-t))$$

$$f_u(t) = \frac{1}{2} (f(t) - f(-t))$$

Im Vektorraum-Modell können Funktionen nach den Basisvektoren eines orthonormalen Funktionensystems zerlegt werden.

Die Basisfunktionen nach Fourier sind hierbei komplexe Schwingungen aufsteigender Frequenz

$$e^{-jk\omega t}$$

$$\text{mit } j = \sqrt{-1}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad k = 0, 1, \dots$$

, deren jeweilige Anteile an einer zunächst als T-periodisch unterstellten Funktion $f(t)$ die Fourierkoeffizienten bezeichnen, wobei analog den Eigenschaften trigonometrischer Funktionen $f_g(t)$ nach $\cos(jk\omega t)$ und $f_u(t)$ nach $\sin(jk\omega t)$ entwickelt werden.

Ähnlich wie das Skalarprodukt zweier "herkömmlicher" Vektoren als Maß für den Anteil des jeweils einen in Richtung des anderen aufgefaßt werden kann, erhält man mit dem aufgrund

der "funktionalen" Vektoren über den gesamten Bereich zu integrierenden Produkt aus Zielfunktion und Fourierbasen die Anteile der einzelnen Orthonormalbasen bezüglich des Zielvektors.

$$F(e^{jk\omega t}) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-1} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Entsprechend bilden die integrierten Produkte der Basen und ihrer Koeffizienten

$$f(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}-1} F(k) e^{jk\omega t} dt$$

wieder den Ausgangsvektor, bzw. approximieren ihn im Sinne der "kleinsten Quadrate" bestmöglich, sofern $f(t)$ bandbegrenzt ist, d.h. mit Schwingungen endlich vieler Frequenzen erzeugt werden kann.

Durch die Hilfsannahmen "unendlicher Periode" a priori unperiodischer Funktionen ,bzw. eines alle N Abtastwerte identischen Verlaufes diskret(isiert)er Funktionen wird auch das digitalisierte Bildsignal Fourier-transformierbar; das Abtastintervall beträgt eine Pixelbreite (-höhe) und entspricht den Peak-Abständen des Diracfeldes aus der Digitalisierungsfaltung; ein Signal N-periodischer Abtastwerte wird demnach dargestellt als Linearkombination N komplexer Schwingungen. Wegen der Symmetrien

$$\begin{aligned} \cos(\xi) &= \cos(2\pi - \xi) \quad \text{und} \\ \sin(\xi) &= -\sin(2\pi - \xi) \quad ; 0 \leq \xi \leq 2\pi \end{aligned}$$

gilt:

$$F(e^{jk\omega t}) = \overline{F(e^{j(N-1-k)\omega t})}$$

mit $\bar{a} := \text{konjugiert komplex zu } a$

Die 1-dimensionale **Diskrete Fouriertransformation** lautet daher in Analogie der Transformation stetiger Funktionen

$$F(e^{jk\omega t}) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f(t) e^{-jk\omega t} \quad ; \omega = 2 \frac{\pi}{N}$$

und für die 2-dimensional zu transformierende Bildfunktion erhält man aufgrund der Separierbarkeit der Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned} F(e^{-jk_1\omega t_1}, e^{-jk_2\omega t_2}) &= \frac{1}{N^2} \sum_0^{N-1} \sum_0^{N-1} f(t_1, t_2) e^{-j\omega(k_1 t_1 + k_2 t_2)} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_0^{N-1} \left(\sum_0^{N-1} f(t_1, t_2) e^{-jk_1\omega t_1} \right) e^{-jk_2\omega t_2} \end{aligned}$$

Der letzte Term läßt sich folgendermaßen zur algorithmischen Implementierung mittels orthogonaler 1-dimensionaler Transformationen nutzen. Aus den Spaltentransformationen (Klammerterm) der reellen Bildmatrix $\mathbf{M}_0$ ergibt sich eine Matrix komplexer Koeffizienten $\mathbf{M}_1$ gleicher Dimension, deren K.te Zeile alle zum gleichen Fourierkern

$$e^{-jK\omega t_1}$$

gehörigen Spalten-Koeffizienten beinhaltet und nun zeilenweise transformiert wird (Term außerhalb Klammer). Oben erwähnte Symmetrien erlauben hier, lediglich die obere Hälfte von $\mathbf{M}_1$ zu transformieren und den unteren Halbraum durch Punktsymmetrien der Paare konjugiert komplexer Koeffizienten zu bilden, womit eine erhebliche Verkürzung der Rechenzeit verbunden ist, denn wegen Entwicklung der reellen Funktion in den geraden Realteil einer Cosinus- und den ungeraden Imaginärteil einer Sinusfunktion ist die komplexe

Funktion der Koeffizienten hermitisch mit

$$\overline{F(k)} = F(-k)$$

Die komplexen Fourierkoeffizienten

$$F(k_1, k_2) = |F(k_1, k_2)| e^{-j\omega(k_1 t_1 + k_2 t_2)}$$

können verstanden werden als Produkt aus reeller Amplitude

$$|F(k_1, k_2)| = \sqrt{(\Re F(k_1, k_2))^2 + (\Im F(k_1, k_2))^2}$$

und Nullphase

$$\varphi(k_1, k_2) = \arctan\left(\frac{\Im F(k_1, k_2)}{\Re F(k_1, k_2)}\right)$$

der betrachteten Basisfunktion

$$e^{-j\omega(k_1 t_1 + k_2 t_2)}$$

Diese komplexen Amplituden stellen gerade den Anteil der jeweiligen Basis des Vektorraumes an der Zielfunktion dar, der sich analog der Regeln der Vektoranalysis aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren errechnet.

Der Ausdruck

$$F(0, 0)$$

wird wegen seiner Mittelwerteigenschaft als **Gleichanteil** bezeichnet.

Das Amplitudenspektrum

$$|F(k_1, k_2)| = \sqrt{\Re(F(k_1, k_2))^2 + \Im(F(k_1, k_2))^2}$$

kann nach auf das menschliche Auge hin optimierten Transformationen und Skalierungen wieder als Grauwertbild ausgegeben werden, welches als Schaubild der einem Signal innewohnenden Leistung für Überlegungen zu Filtertechniken und Merkmalsextraktion, die in den folgenden Kapiteln behandelt werden, eine probate Grundlage bildet.

Prozedur: **SPECTRUM**

Ausgabe des Amplitudenspektrums

Fast-Fourier-Transform (FFT)

Auf eine wichtige Eigenschaft der Fouriertransformation sei wegen ihrer Bedeutung als mathematische Grundlage des FFT-Algorithmus vorab kurz eingegangen.

Bezeichne

$$f(t) \Leftrightarrow F(k)$$

die Fourierkorrespondenz von Orts- und Frequenzraum, so ergeben sich die Verschiebungstheoreme

$$f(t-c) \Leftrightarrow F(k) e^{-jk\omega c}$$

$$f(t) e^{jct} \Leftrightarrow F(k-c)$$

mit c Konstante

Die Fouriertransformierte einer im Ortsraum um c verschobenen Funktion unterscheidet sich demnach bei unverändertem Amplitudenbetrag nur durch eine Phasenverschiebung

$$e^{-jk\omega c}$$

von der Transformierten der Ausgangsfunktion. Ebenso entspricht eine Verschiebung im Wellenraum einer Multiplikation der Ortsraumfunktion mit einem Phasenfaktor.

Will man ein Amplitudenspektrum z.B. um den **Gleichanteil** zentriert darstellen, so muß die originäre Leistungsdichtematrix mit "Mittelpunkt"

$$\left| F\left(\text{TRUNC}\left(\frac{N-1}{2}\right), \text{TRUNC}\left(\frac{N-1}{2}\right)\right) \right|$$

im Frequenzraum um eine halbe Periode in Zeilen- bzw. Spaltenrichtung verschoben werden.

Stimmt man die Berechnung auch hier wieder auf die Normperiode 2π ab, so erreicht

man die gewünschte Verschiebung im Frequenzraum durch Multiplikation des Ortsraumbildes gemäß

$$-1^{t_1+t_2} f(t_1, t_2)$$

da sich über das Verschiebungstheorem sofort

$$f(t_1, t_2) e^{j\pi(t_1+t_2)} \leftrightarrow F(k_1-\pi, k_2-\pi)$$

$$f(t_1, t_2) \cos(\pi(t_1+t_2)) \leftrightarrow F(k_1-\pi, k_2-\pi)$$

$$-1^{t_1+t_2} f(t_1, t_2) \leftrightarrow F(k_1-\pi, k_2-\pi)$$

ergibt.

In den Erläuterungen des Quellcodes wird diese Operation auch als Schachbrett bezeichnet.

Die Kenntnis der Verschiebungstheoreme erlaubt nun die bessere Interpretation folgender einfacher Umformung des originären 1-d-Transformationsterms

$$\begin{aligned} F(k) &= \sum_{t=0}^{N-1} f(t) e^{-jk\omega t} \\ &= \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} f(t) e^{-jk\omega t} + \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} f(t+\frac{N}{2}) e^{-jk\omega(t+\frac{N}{2})} \\ &= \sum_{t=0}^{\frac{N}{2}-1} (f(t) + e^{-jk\pi} f(t+\frac{N}{2})) e^{-jk\omega t} \end{aligned}$$

zu einem Ausdruck halber Summationstiefe, mit welchem unter Berücksichtigung von

$$e^{-j2\pi k} = 1$$

$$\text{sowie wegen } e^{-j\pi k} = -1$$

$$\text{auch } e^{-j\pi k(2k+1)} = e^{(-j\pi k)^{2k+1}} = -1$$

die nach geraden ($c_g = 2k$), bzw. ungeraden c ($c_u = 2k+1$) getrennten Transformationsformeln

$$F(2k) = \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \left(f(t) + f\left(t + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-2jk\omega t}$$

$$F(2k+1) = \sum_0^{\frac{n}{2}-1} \left(f(t) - f\left(t + \frac{N}{2}\right) \right) e^{-j\omega t} e^{-2jk\omega t}$$

hergeleitet werden. Der untere Term unterscheidet sich lediglich durch das Vorzeichen der um $N/2$ verschobenen Ur-Funktion, und einen Phasenfaktor $e^{-j\omega t}$ vom oberen.

Der zweite Summand der Klammer besitzt nach 2-facher Anwendung des Verschiebungstheoremes die Fouriertransformierte

$$e^{-j\pi k} f\left(t + \frac{N}{2}\right) \Leftrightarrow F(k+\pi) e^{jk\frac{N}{2}}$$

Da man die Halbierung der jeweiligen Summationstiefe $\log_2 N - 1$ mal fortsetzen kann und durch bezeichnete Symmetrien obiger Koeffiziententerme rechenaufwendige Multiplikationen zu ersparen oder mittels schnellerer Additionen (Subtraktionen) zu "erkaufen" sind, ist mit diesem rekursiven Basis-2-Algorithmus von Cooley-Tukey (Sande-Tukey) eine **FAST-FOURIER-TRANSFORM** möglich. Durch eine besondere Form der (De)Codierung, das sogenannte Bit-Reversal, werden Startwerte, Zwischenschritte und Ergebnisse einander wieder eindeutig zugeordnet.

Algorithmen zur 2-dimensionalen Hin- und Rücktransformation sowie Anwendungen des 2-dimensionalen Verschiebungstheoremes unter

Prozedur: **FREQDOMAIN**

Masken und Filter

In Anwenderkreisen finden einige einfache Operatoren des Ortsraumes zur Glättung und Kantenextraktion weite Verbreitung, deren Frequenzübertragungsverhalten jedoch meist ungünstig ist, während Filterungen der Signale im Wellenraum zu Bildverbesserung, Rauschunterdrückung und Merkmalsextraktion oft wenig bekannt sind.

Der für die Nachrichtentechnik elementare Faltungssatz

$$f(t_1, t_2) * g(t_1, t_2) \Leftrightarrow F(k_1, k_2) G(k_1, k_2)$$

bildet hierbei für die im folgenden vorgestellten Techniken die gemeinsame Grundlage, d.h. einer Faltungsoperation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi_1, \varphi_2) g(t_1 - \varphi_1, t_2 - \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2$$

, wie sie mit Filtermasken des Ortsraumes vorliegt, entspricht im Wellenraum eine Multiplikation der jeweiligen Fouriertransformierten von Urfunktion und Faltungskern, vergleichbar etwa der Analogie eines Produktes zweier Zahlen und der Summe ihrer Logarithmen im "Logarithmenraum" .

Ausgehend von der Wellenraumdarstellung für den 1-dimensionalen Fall erhält man nämlich über einfache Umformungen

$$\begin{aligned}
F(\omega) G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\zeta} G(\omega) f(\zeta) d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\zeta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\varphi} g(\varphi) d\varphi \right) f(\zeta) d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega(\zeta+\varphi)} g(\varphi) f(\zeta) d\varphi d\zeta \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} g(\varphi) f(t-\varphi) d\varphi dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\varphi) f(t-\varphi) d\varphi \right) dt \\
&\quad \text{mit } t = \zeta + \varphi
\end{aligned}$$

mit dem letzten Term gerade die Fouriertransformierte des Faltungsintegrals.

Eine ebenso einfache wie häufig für die "Tiefpassfilterung" angewandte $t \times t$ -Maske mit $t \in \{n \mid n \bmod 2 = 1\}$ ist z.B.

$$\begin{bmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \cdot \\
\cdot & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \frac{1}{t^2} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{bmatrix}_t$$

, deren optische Transferfunktion als Fouriertransformierte zwecks Übersichtlichkeit der Darstellung lediglich 1-dimensional abgeleitet wird.

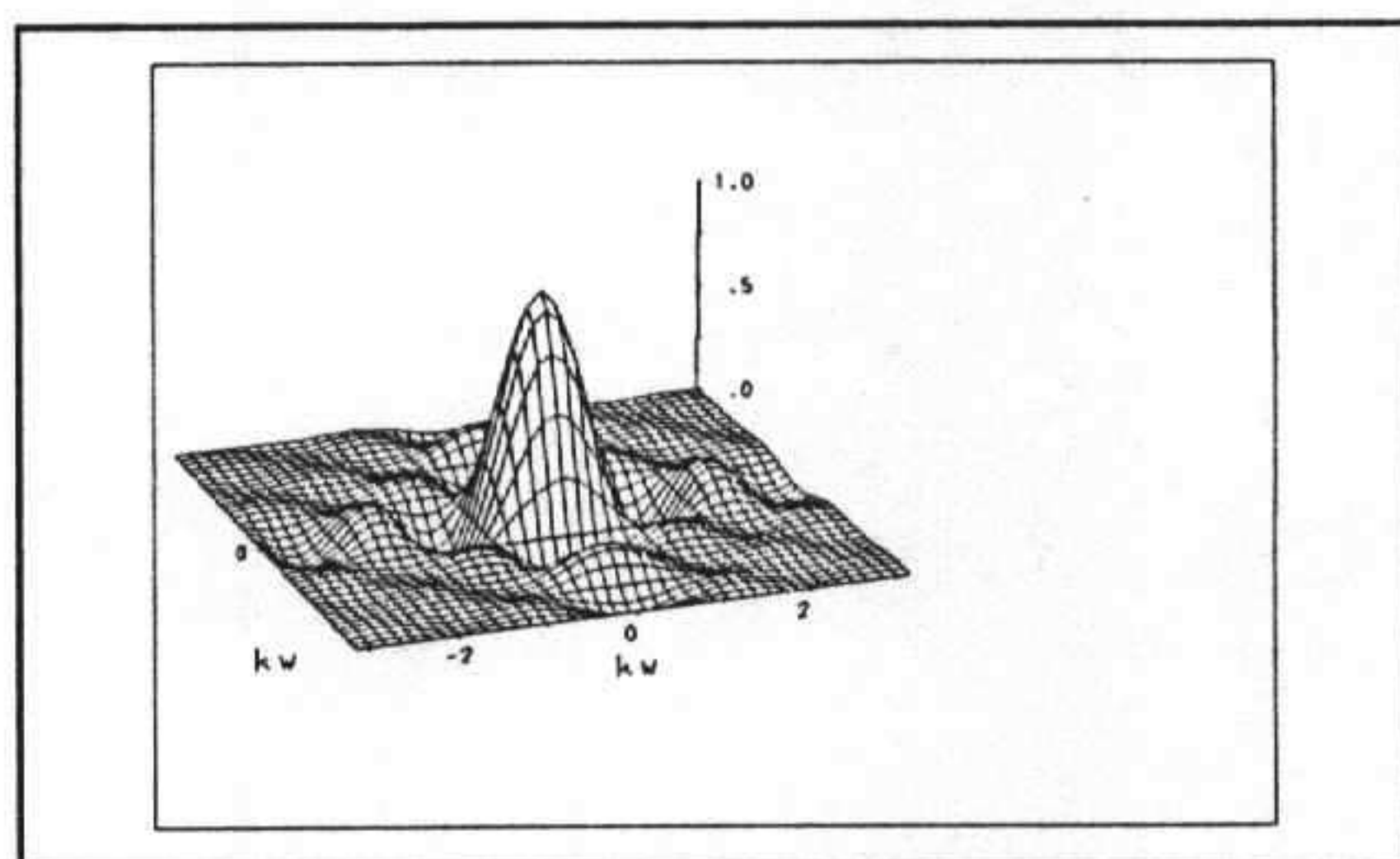
Da eine gerade Funktion vorliegt, kann man sich auf eine Cosinustransformation des Rechteckimpulses

$$\Pi(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{\varphi} & ; |\varphi| \leq \frac{t}{2} \\ 0 & ; |\varphi| > \frac{t}{2} \end{cases}$$

beschränken und erhält mit

$$\begin{aligned} F_k(\Pi(\varphi)) &= \frac{1}{t} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \frac{1}{t} \cos(k\omega\varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{t^2} \left[\frac{1}{k\omega} \sin(k\omega\varphi) \right]_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{t} \frac{\sin(k\omega \frac{t}{2})}{k\omega \frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{t} \text{SINC}(k\omega \frac{t}{2}) \end{aligned}$$

eben jene SINC-Funktion, welche bereits als Modell des Spalt-Übertragungsverhaltens (cf. KONVOLUTION) bekannt ist.



2-DIMENSIONALE SINC-FUNKTION

Die Modellannahme eines cosinusförmigen Signales war dort bereits auf spätere formelle Gleichheit mit dem Fourierintegral des Rechteckimpulses abgestimmt worden, um die Identität der Fouriertransformierten mit der charakteristischen Transferfunktion des Spaltes zu verdeutlichen, von der wir bereits wissen, daß sie nach dem für einen Tiefpass wünschenswerten Abfall die Abszisse bei $m2\pi/t$ mit $m = \{\dots, -2, -1, 1, 2, \dots\}$ schneidet, mithin im Bereich negativer Werte durch ihre multiplikative Wichtung Phasenverschiebungen bewirkt, zwischen den Singularitäten das Vorzeichen wechselt und somit keinen gleichmäßigen Abfall zu höheren Frequenzen hin aufweist. Des weiteren zeigt die 2-dimensionale SINC-Funktion keine Rotationsinvarianz, weswegen sie für die Tiefpassfilterung trotz der Beliebtheit ihrer Impulsantwort (Rechteckmaske) bei vielen Anwendern schlecht geeignet ist.

Wegen des Augenmerkes auf ihre Wellenraumeigenschaften wird eine Funktion in der Nachrichtentechnik nach bester Approximation des gewünschten Signalübertragungsverhaltens entworfen. Die inverse Transformation ergibt als Ortsraumkorrespondenz die Koeffizienten für eine mögliche Filtermaske, falls man die Berechnung nicht ohnehin im Wellenraum durchführt.

Eine streng monoton fallende und annähernd rotationsinvariante Funktion mit Tiefpasseigenschaften ist z.B.

$$G(k_1, k_2) = e^{-\frac{(k_1^2 + k_2^2) (\pi \omega)^2}{\alpha}}$$

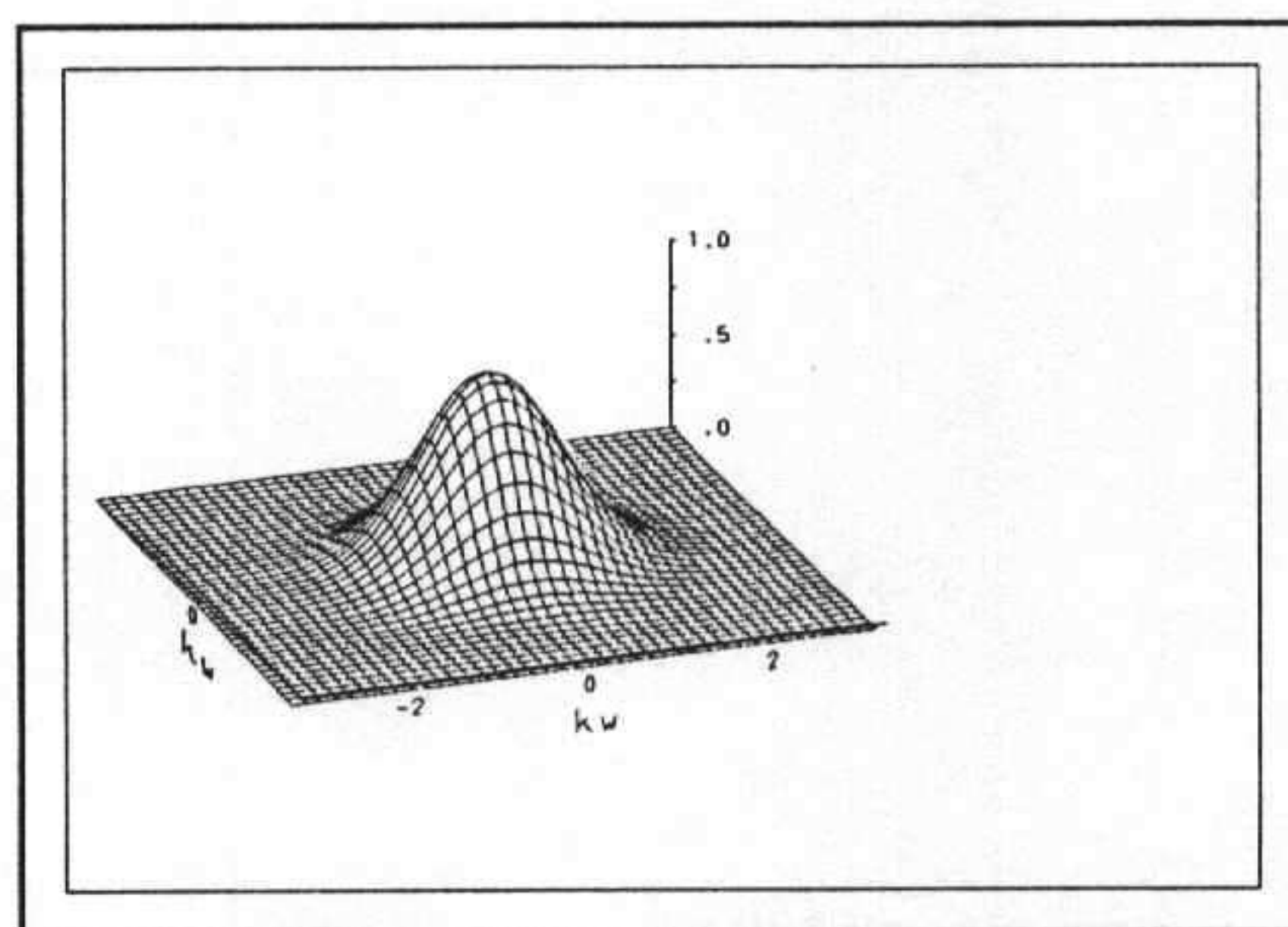
mit $\omega = \frac{2\pi}{N}$; N doppelte Grenzwellenzahl

und $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

deren Rücktransformation auf die bekannte Gauss-Glocke

$$g(t_1, t_2) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha(t_1^2 + t_2^2)}$$

führt, mit welcher die Koeffizienten einer $t \times t$ -Maske für eine Ortsraumfaltung berechnet werden können.



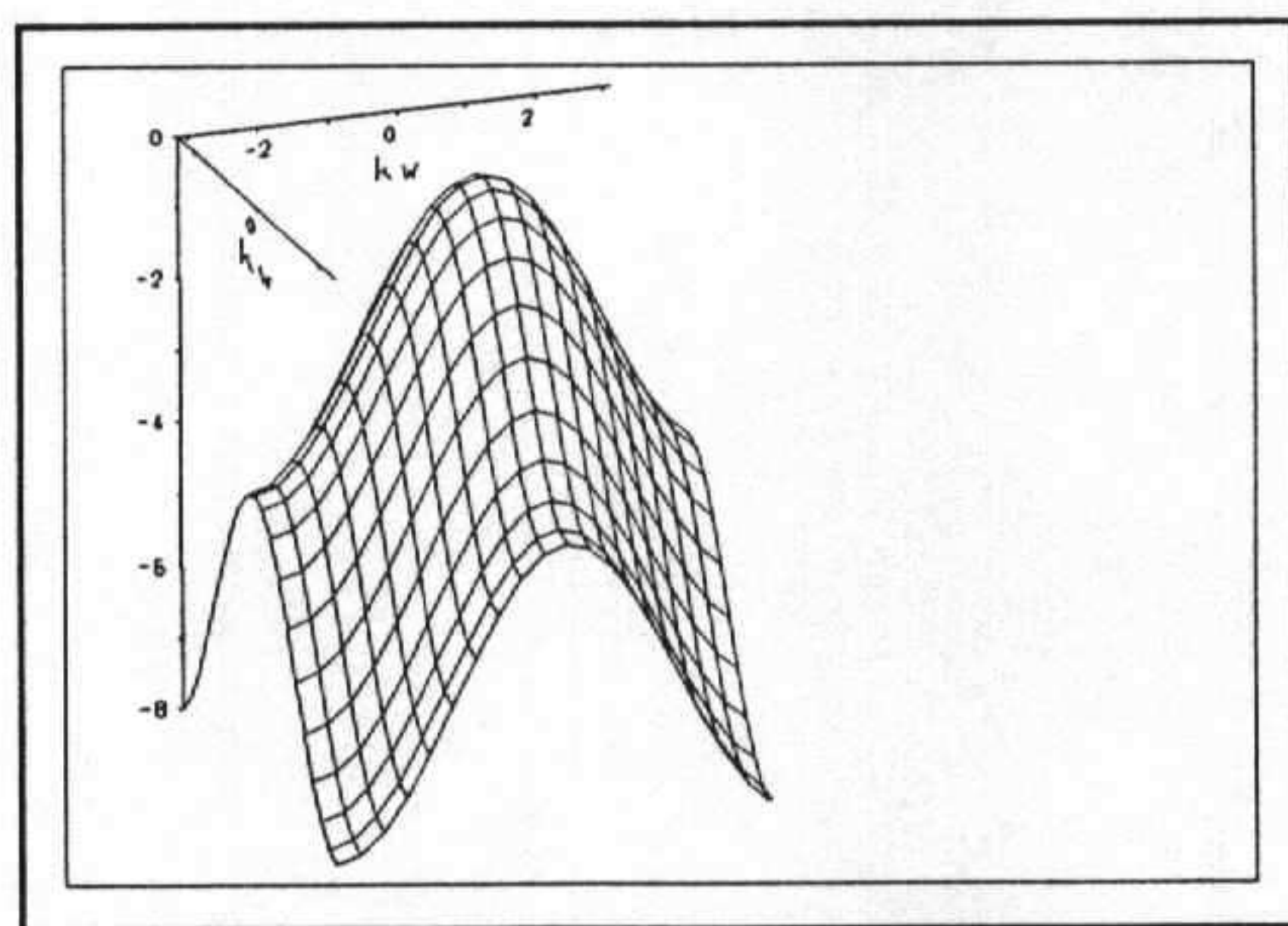
GAUSS-FILTER

Eine weitere Gruppe für die Bildverarbeitung häufig angewandter Methoden, welche im Ortsraum meist durch einfache digitale Approximation der ersten Richtungsableitungen mittels Paaren anisotroper $t \times t$ -Masken realisiert werden, lassen sich unter dem Begriff der Kantenextraktionsverfahren fassen.

Entsprechende Gradientenoperatoren mit Anisotropie (z.B. Sobel-Operatoren) oder näherungsweise Invarianz gegenüber den Kantenrichtungen (Laplace-Operator als Annäherung an die zweiten Ableitungen) gehören ebenso wie Medianfilter und Binomialmasken für die Bildverbesserung zu Standard-Algorithmen, die hier unter Verweis auf den Quellcode unten genannter Verzeichnisse nicht vertieft werden sollen.

Wegen ihrer Eigenschaft der Isotropie zumindest für kleine Wellenzahlen sei hingegen die Laplace-Filterung im Frequenzraum erwähnt, mit welcher Kanten aller Richtungen in einer einzigen Operation detektiert werden können. Die Koeffizienten der Übertragungsfunktion erhält man nach Fourier-Transformation der Impulsantwort zu

$$L(k_1, k_2) = -4 + 2\cos(\omega k_1) + 2\cos(\omega k_2)$$



LAPLACE-OPERATOR

Prozeduren:

FREQDOMAIN:

Sinc-Funktion

Gauss-Filter

Laplace-Filter

GRADIENT:

Laplace-Operator im Ortsraum

Sobel-Filter

Kompaß-Masken

SPACEFIL:

Tiefpass/Hochpass-Filter im Ortsraum

Binomial-Masken

Median-Filter

Einfache Übertragungsfunktionen zur Bildverbesserung

Ein zentrales Anliegen der 2-dimensionalen Signalverarbeitung stellt als Voraussetzung für weitere Bildoperationen die Verbesserung des Signal-Rausch-Verhältnisses dar, für welche unter der Annahme eines überwiegenden Rauschanteiles im Bereich hoher Frequenzen eine Reihe von Methoden zur Anwendung kommen, die in einem weiten Sinne dem Bereich der Tiefpassfilterung zuzurechnen sind.

Ihnen allen gemein ist eine gegenüber den hohen Frequenzen relative Anhebung der niederen Frequenzen, da der Rauschanteil des Bildes modellgemäß einen besonders hohen Erklärungsanteil der hohen Frequenzen aufweist, während deren Beitrag zur Fourierreihe des ungestörten Signales verhältnismäßig gering ist.

Eine Tiefpassfilterung geht somit durch Unterdrückung der hohen Frequenzen stets mit einem Verlust an Bildschärfe einher. Die hierdurch entstehende Verfälschung des Ausgangssignales soll so gering wie möglich bleiben, weswegen die erörterten Mittelwertmasken aus den in vorigen Abschnitten bereits genannten Gründen als wenig geeignet erscheinen.

Bereits das simple "Abschneiden der Amplituden" aller über einer als Schwelle festzulegenden Frequenz K vor der inversen Transformation stellt eine besser geeignete Methode dar und kann bei um den Gleichanteil zentriertem Spektrum durch die einfache Übertragungsfunktion eines **idealen Tiefpasses**

$$G(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} 1 & ; \sqrt{|k_1 - \text{TRUNC}(\frac{N-1}{2})|^2 + |k_2 - \text{TRUNC}(\frac{N-1}{2})|^2} < K \\ 0 & ; \text{ELSE} \end{pmatrix}$$

leicht implementiert werden. Der "Pythagoras" trägt hierbei dem Umstand Rechnung, daß das Abtast-Intervall des 2-d-Signales in Diagonalenrichtung als Hypotenuse orthogonaler Pixelkanten gegenüber kantenparalleler Abtastung verlängert ist, mithin eine durch die Digitalisierung bedingte Ungenauigkeit vorliegt.

Einem **Hochpass** liegt eine analoge Übertragungsfunktion zugrunde.

Neben dem vordem erläuterten **Gauss-Filter** sei mit dem **Pruning-Filter** ein Verfahren vorgestellt, welches nach einer Schätzung der mittleren Rauschleistung (des mittleren Amplitudenquadrates der Störsignale) das Leistungsspektrum des Bildes um ein zu schätzendes Vielfaches derselben vermindert. Bei Subtraktion des Rauschpegels müssen negative Differenzen, die eine Phasenverschiebung ähnlich den Unterschwingern der SINC-Funktion bewirken, vermieden werden.

Als Schätzer der mittleren Rauschleistung verwandte der Autor ein Vielfaches des mittleren Amplitudenquadrates aller über einer beliebigen Schwellfrequenz liegenden Schwingungen. Unter "Restaurierung" im Verlauf der Rechnung umgekehrter Phasen erhält man die Amplituden des gefilterten Bildes zu

$$|F(k_1, k_2)|_{filter} = \begin{pmatrix} \sqrt{|F(k_1, k_2)|^2 - \overline{A_R^2}} & ; & |F(k_1, k_2)| - \sqrt{\overline{A_R^2}} > 0 \\ 0 & ; & ELSE \end{pmatrix}$$

mit $\overline{A_R^2}$ mittleres Amplitudenquadrat der Störsignale

$$\text{und } \alpha[F(k_1, k_2)]_{filter} = \alpha[F(k_1, k_2)]$$

wobei der erhebliche Rechenaufwand dieses Filters hier auch Folge des besonderen Schätzverfahrens der Testphase und daher optimierbar ist.

Eine ganz andere Zielsetzung verfolgt die **homomorphe Bildfilterung**, über welche in der Hauptsache eine Kontrastverstärkung feinerer Texturen erreicht werden soll.

Die zugrundeliegende Modellvorstellung betrachtet ein Bildsignal als Produkt einer lokal wenig variierenden, also niederfrequenten Beleuchtungsfunktion und eines vorwiegend höherfrequenten Reflexions- bzw. Transmissionsanteiles variabler Strukturen, der überwiegend die eigentliche Bildinformation erklärt. Die Logarithmierung des Signalproduktes führt somit auf eine Summendarstellung der beiden Bestandteile und bietet unter den genannten Postulaten vorwiegend niederfrequenter Beleuchtungswechsel nebst höherfrequenter Texturinformation die Basis für eine relative Anhebung höherer Frequenzen des logarithmierten Bildes.

Eine geeignete Übertragungsfunktion bildet mit empirisch zu schätzenden q_i ; $i = \{1, 2, 3\}$ z.B.

$$G(k_1, k_2) = \begin{pmatrix} 1 & ; & k_1 = 0 \text{ und } k_2 = 0 \\ q_1 - (q_1 - q_2) e^{-\frac{(k_1^2 + k_2^2)}{q_3^2}} & ; & ELSE \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Rücktransformation muß nun entsprechend exponenziert werden, um das gefilterte Bild zu erhalten; die Logarithmierung sollte lediglich das multiplikative Modell in Überführung auf eine Summendarstellung obiger Übertragungsfunktion zugänglich machen.

Einfachere Techniken zur Kontrastverstärkung im Ortsraum bieten vielfältige Möglichkeiten der **Histogrammanipulation**, denen alle an der jeweiligen Verteilungsfunktion der Grauwerte orientierte Transformationen unter diverser Wichtung eigen sind.

Eine für das menschliche Auge in vielen Fällen gut geeignete Transformation erhält man über die **Äqualisation**, welche die jeweiligen relativen Häufigkeiten innerhalb gleichgroßer Grauwertintervalle so verändert, daß alle Intervallintegrale identisch werden.

Prozeduren:

FREQDOMAIN:

idealer Tiefpass/Hochpass

Pruning-Filter

homomorphe Filterung

HISTGRAM:

Histogramm mit Transformationen diverser Kennlinien

Äqualisation

Ein Ansatz zur Texturanalyse

Das Amplitudenspektrum eines bandbegrenzten 2-dimensionalen Signales, z.B. eines Fensterausschnittes der Bildmatrix, ist für Texturen mit periodischen Strukturen statistisch faßbarer Richtungs- und/oder Frequenzcharakteristik nach Einschätzung des Autors eine vielversprechende Grundlage der Merkmalsextraktion, wobei auch das Fehlen charakteristischer Frequenzmuster anderer Objekte zur Mustererkennung herangezogen werden kann.

Eine solch vorwiegend hochfrequente Struktur ohne deutliche Richtungsbevorzugung und lokale Maxima, jedoch mit intervallartigen Häufungen innerhalb statistischer Frequenzringe des Amplitudenspektrums könnte ein Ansatz zur Wald- und/oder Baumerkennung in einem Schwarz-Weiß-Bild allein auf Grundlage textueller Merkmale sein.

Hierzu wird zunächst der obere Halbraum des Amplitudenspektrums eines interaktiv ausgewählten $t \times t$ -Fensters ($t=2^n; n \in \mathbb{N}$) berechnet. Aufgrund des Periodizitäts-Postulates der Fouriertransformation weist die a priori unperiodische Ortsfunktion an ihren Intervallgrenzen Sprungstellen auf, die allein auf die Begrenztheit der Fensterfunktion zurückzuführen sind und somit zu einer Verfälschung des Spektrums führen. Diesem Umstand wird in der Praxis meist durch eine harmonisch zum Rand des Fensters abfallende Wichtungsfunktion begegnet, die diesen Randeinfluß mildert.

Eine solche Wichtungsfunktion stellt z.B. das sogenannte **Hamming-Fenster**

$$HAM(\varphi_1, \varphi_2) = (0.54 - 0.46 \cos(\varphi_1 \omega)) (0.54 - 0.46 \cos(\varphi_2 \omega))$$

$$\text{mit } \omega = \frac{2\pi}{t}$$

dar, welches zum Rand hin nicht ganz auf Null abfällt und den Einfluß der Fensterkanten neutralisiert.

Als Merkmals-"Einheit" des Spektrums, so eine Richtungsbevorzugung periodischer Grundmuster innerhalb eines Fensters angenommen wird, können z.B. die Amplitudengehalte

eines Kreisbogensegmentes definierter Größe gelten.

Granlund (1978) beschreibt hierzu ein Verfahren, das wegen seiner im Original knappen und daher nicht ganz leicht verständlichen Darstellung hier mit allen Zwischenschritten erläutert werden soll. Die Ableitung, welche im folgenden bereits auf die Implementierung mittels Diskreter Fouriertransformation abgestimmt wurde, beschränkt sich gemäß bisheriger Praxis zwecks besserer Darstellung auf den 1-dimensionalen Fall, da ein Transfer in die zweite Dimension analog ist.

Der in bisheriger Konvention vor den Summenterm der Fouriertransformation gestellte Faktor $1/N$ wird für die weiteren Ausführungen in Entsprechung vor den Summenterm der Rücktransformation gesetzt, da sich dadurch die folgenden Äquivalenzumformungen einheitlicher fassen lassen und die mathematischen Zusammenhänge unberührt bleiben. Die Ausführungen gelten für $N \times N$ -Fenster mit $2 \leq N \leq \text{SIZE}(\text{Urbild})$ und $N = 2^m$; m natürliche Zahl.

Anstelle obigen **Hamming-Fensters** verwendet Granlund wegen ihrer günstigen Transformationseigenschaften die bereits im Rahmen der Filtertechniken und Dirac-Felder vorgestellte **Gauss-Glocke**

$$g(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}$$

Für das Gauss-gewichtete Signal ergibt sich

$$F(k_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(\xi) e^{-jk_0 \omega \xi}$$

als komplexe Amplitude einer gesuchten Frequenz k_0 .

Sei weiter eine Konvolution gegeben mit

$$h(q) = f(q) * [g(q) e^{jk_0 \omega q}] = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(q-\xi) e^{jk_0 \omega (q-\xi)}$$

so gilt unter der mit der Gauss-Funktion erfüllten Bedingung

$$g(q) = g(-q)$$

wegen

$$h(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(\xi) e^{-jk_0 \omega \xi}$$

die Äquivalenz

$$F(k_0) = h(0)$$

d.h., der Fourier-Koeffizient $F(k_0)$ eines mit einer geraden Funktion gewichteten Signales ist genau für den Koordinatennullpunkt einer Faltung desselben mit der gewichteten k_0 -fachen Grundschwingung analog. Die gefolgerten Terme beider Denkansätze sind demnach unter den gemachten Voraussetzungen äquivalent und bieten eine alternative Implementierungsmöglichkeit unter Vermeidung der eigentlichen Fouriertransformation.

Betrachtet man nun die Fourierkorrespondenz

$$h(q) \Leftrightarrow H(k)$$

so erhält man durch Anwendung des Ortsraum-Faltungstheoremes

$$\begin{aligned} H(k) &= FT[f(q) * (g(q) e^{jk_0 \omega q})] \\ &= FT[f(q)] FT[g(q) e^{jk_0 \omega q}] \end{aligned}$$

als zugeordnete Spektraldarstellung das Produkt aus der Fouriertransformierten des Signales

und der Transformierten einer Gauss-gewichteten Schwingung derjenigen Frequenz, nach welcher der Bildausschnitt des Fensters gerade zu entwickeln war.

Aufgrund des Faltungstheoremes des Wellenraumes (cf. "MASKEN UND FILTER") ergibt sich über folgende Korrespondenz eines **verschobenen Dirac-Impulses** mit einem Phasenfaktor des Ortsraumes

$$e^{j\beta} \Leftrightarrow \delta(k-\beta)$$

und die ebenfalls bereits aufgezeigte Ausblendeigenschaft des **Dirac-Impulses** für den zweiten Faktor

$$\begin{aligned} FT[g(q) e^{jk_0 \omega q}] &= FT[g(q)] * FT[e^{jk_0 \omega q}] \\ &= FT\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha q^2}\right] * \delta(k-k_0) \\ &= e^{\frac{-\omega^2 k^2}{\alpha}} * \delta(k-k_0) \\ &= e^{\frac{-\omega^2 (k-k_0)^2}{\alpha}} \end{aligned}$$

und somit insgesamt

$$H(k) = F(q) e^{\frac{-\omega^2 (k-k_0)^2}{\alpha}}$$

Die komplexen Amplituden der Urfunktion innerhalb eines symmetrischen Frequenzbandes

$$e^{\frac{-\omega^2 (k-k_0)^2}{\alpha}}$$

bilden damit gerade die korrespondierende Wellenraumdarstellung der Faltung aus Signal und phasenfaktorgewichteter Gauss-Funktion.

Bei Betrachtung des Faktors α in den Gauss-Termini wird die Reziprozität von Fenstergröße und Frequenzausschnitt deutlich. Je eher demnach die Fensterfunktion einem Diracstoß angenähert ist, desto ausgedehnter ist durch die Unschärferelation von Orts- und Wellenraum das zugehörige Spektrum und vice versa.

Als wirksame Fenstergröße T setzt Granlund diejenige Distanz zweier Punkte für welche gilt,

$$g\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{g(0)}{2}$$

woraus für die Gauss-Funktion

$$T = 2\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)}$$

folgt.

Werde der Faktor α so bestimmt, daß das wirksame Fenster n Perioden des Basisvektors

$$e^{j\omega k_0 q}$$

umfaßt, so ergibt sich

$$G(k_0) = e^{-\frac{\omega^2 (k-k_0)^2 n^2}{4k_0^2 \ln 2}}$$

über den Ansatz

$$\frac{n}{k_0} = 2\sqrt{\left(\frac{\ln 2}{\alpha}\right)}$$

, woraus man sofort

$$\alpha = \frac{4k_0^2 \ln 2}{n^2}$$

in obiger Formel substituieren kann. Die relative wirksame Fenstergröße ist daher eine Konstante.

Auf ein nach gegenwärtigem Dafürhalten des Autors logisches Problem in Granlunds Vorschlag zweier alternativer Lösungsansätze durch Konvolution respektive Frequenzbandausschnitt sei hingewiesen, welches trotz mehrerer Gespräche mit den Herren Dr. Platzer und Molocher vom Institut für Nachrichtentechnik sowie Herrn Eckstein aus der "Forschungsgruppe für wissensbasierte Systeme" der Fakultät für Informatik als vorläufiges "Aporem" der Modellvorstellungen bestehen bleibt.

So ist $h(0)$ zwar eine andere Interpretation des Ausgangstermes

$$h(0) = F(k_0) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(\xi) e^{-jk_0 \omega \xi}$$

und bietet damit einen vereinfachten rechnerischen Ansatz für die Implementation, bei welcher man den Koeffizienten einer Schwingung nicht mehr als Untermenge der vollständigen Fourier-Transformation sondern über ein einziges Faltungsintegral erhält; die Transformierte

$$H(k) = F(q) e^{\frac{-\omega^2 (k-k_0)^2}{\alpha}}$$

jedoch stellt das korrespondierende Spektrum der Funktion $h(t)$ dar und ist kein Analogon eines einzigen ihrer Werte $h(0)$. Alle Spektren von Ortsraumfunktionen h_i mit $i \in \mathbb{N}_0$ und gemeinsamem Schnittpunkt in $h(0)$ wären somit Lösungen des Ausgangsproblem, was keine eindeutige Aussage zuläßt.

Prozedur (Testversion): **GRANLUND**

Diskussion

Die praktische Bedeutung forstlicher Fernerkundung steht und fällt mit der schnellen Verfügbarkeit und dementsprechenden Aktualität großer Datenmengen zur raschen Erstellung flächiger Übersichten. Eine in der Praxis hohe Verzögerungsrate manueller Auswertungen macht hier jedoch viele Vorteile zunichte.

Die 2-dimensionale digitale Signal- und Bildverarbeitung stellt die elementaren Verfahrensweisen zur Verarbeitung nachrichtentechnischer Daten in Luftbildern zur Verfügung, wobei die Fourieranalyse als grundlegendes Modell technischer Filter wie biologischer Systeme dient und Ansatzpunkte für die Merkmalsextraktion bietet.

Der Transputer mit seiner zukunftsweisend parallelen Rechnerarchitektur war hierbei wegen seiner hohen Rechenleistung und der inhärent parallelen Natur vieler Algorithmen für die digitale Signalverarbeitung besonders geeignet. Mit der Weiterentwicklung leistungsfähiger INTEL-CPU's neben Etablierung von Parallelrechnern anderer Hersteller und wegen einer neuen Firmenpolitik nach Übernahme der Firma INMOS durch SGS-THOMSON gilt diese Aussage zum Zeitpunkt der Drucklegung jedoch nurmehr eingeschränkt.

Bekannte Kritikpunkte der Transputerklasse T8 und Occam 2 wie etwa

- strenge Typbindung und fehlende automatische Konvertierung
- Verzicht auf Zeiger und rekursive Programmierung
- Beschränkung der Software-Link-Anzahl auf die Anzahl der Hardwarekanäle
- Fehlen eines Interrupt-Vektors
- nicht getroffene Operatorpräzedenzen
- zu grobe Prioritätsabstufung in parallelen Prozessen
- langsames Prozessverteilungsverfahren im Scheduler durch Einreihung aktivierter Prozesse in Warteschlange
- fehlende Memory-Management-Unit (MMU)

werden mit Marktreife des lange angekündigten T9000 (virtueller Kanalprozessor, 4 Interrupts, MMU) und der neuen Sprachversion OCCAM 3 allerdings weitgehend entfallen.

In praktischen Anwendungen bleiben nachrichtentechnische Methoden, die mit Etablierung moderner Systeme wie Video und Radar zunehmend unverzichtbar werden, jedoch oft ungenutzt .

Die Suche nach geeigneten Methoden objektspezifischer Merkmalsextraktion und Segmentierung von Bildern ist eines der großen Problemfelder der Signalvor- und weiterverarbeitung. Wegen der beschränkten Möglichkeiten herkömmlicher Clusteranalysen der reinen Signaturforschung zielen Überlegungen auf Untersuchung und adäquate Beschreibung von Nachbarschaftsbeziehungen. Statistiken erster Ordnung zählen neben Fourier-Leistungsspektren zu den meist verwandten dieser texturanalytischen Verfahren .

Bei Betrachtung vielfältiger Schwingungsüberlagerungen wie Sprache, maritimen Oberflächenströmungen oder Texturen statistischer Frequenzhäufung eines Fingerabdruckes stellt eine Transformation nach Fourier, Hadamard etc. bei entsprechender Rechenleistung den probaten Ansatz dar.

So sind etwa die beiden wichtigsten Perzeptionsorgane des Menschen, Auge und Ohr, physikalische "Fouriertransformatoren"; erstes ist Phasen- , zweites Amplitudensensibel.

Im Hinblick auf die stets gewünschte maßzahlartige Fassung der Grundgesamtheit aller Ausprägungen einer Texturklasse bildet jeder Fourier-Koeffizient des oberen Spektral-Halbraumes als Index einer periodischen Struktur bereits eine kennwertartige Verkürzung des Signales, welche bei hierarchischer Überlagerung statistisch regelmäßiger Sub-Muster, wie etwa in der Baumkronenstruktur bei Luftbildern vermutet, ein geeignetes Analyseverfahren darstellen könnte, wobei auch eine gegenüber anderen Objektklassen weniger geordnete , eher zufällige Struktur fourieranalytisch beschreibbare Merkmale bietet.

Dergestalt komplizierte Ansätze der Merkmalsextraktion fanden im Boom der Satellitenfernerkundung und Signaturanalyse mit ihren auf großräumiger Basis zunächst schnell wachsenden Klassifikationserfolgen lange Zeit wenig Beachtung. Auch schien der Trend zu steter Erhöhung von Meßkanalzahl und Auflösungsvermögen viele in der Einleitung genannte Problemfelder zu relativieren und eine alleinige Beibehaltung vertrauter statistischer Verfahren wie Hauptkomponenten- und Clusteranalyse zu rechtfertigen. Das Aufkommen einer Vielzahl anwendungsfreundlicher Bildverarbeitungs- und Statistiksysteme tat ein

Übriges, zumal für die praktische Luftbildauswertung in vielen Fällen lediglich Methoden der weiträumigen Satellitenfernerkundung übernommen wurden, obwohl Objekte des Luftbildes wesentlich feinerstrukturiert und von komplexer Textur sind.

Ein Schwarz-Weiß-Bild mit aller für Wald- und Einzelbaumerkennung biologischer Systeme notwendigen Texturinformation ist der Signaturanalyse hingegen ein unbeschriebenes Blatt. Mehrkanalige Bilder können nur bei großer Flughöhe unter Einebnung diskriminanzanalytisch störender Details nach dem zentralen Grenzwertsatz befriedigend segmentiert werden, wenn die Fragestellungen entsprechend großflächig orientiert und demgemäß wenig detailliert ausgelegt sind.

Bereits eine Trennung Wald - Nichtwald wird daher bei Luftbild-Maßstäben, wie sie gerade in der Forstpraxis mit ihren meist an Einzelobjekten orientierten Fragen vorliegen, zunehmend unzuverlässig. Jeder weitergehende Anspruch an die Objekterkennung, etwa Unterscheidung von Nadel- und Laubwald, zuverlässige Waldklassifikation unter abweichenden Bestockungsgraden oder gar Schadstufendetektion am Einzelbaum versagt sich entsprechend. Lassen sich einige Schadstufen nach Kanal-Indices und Farbtexturen in der Grundgesamtheit aller Baumkronen eines Luftbildes unterscheiden, so muß die Objektmenge der Kronen erst einmal extrahiert werden, was über Rückstrahlungsanalysen insbesondere bei lichten Beständen, unterschiedlichen Sonnenständen, Jahreszeiten, Baumarten etc. schwer möglich ist. Die für Satellitenfernerkundung charakteristische Klassifikation großer Areale nach ihren mittleren Rückstrahlungseigenschaften, in denen lokale Unterschiede wie etwa kleinere Waldgebiete, Freiflächen etc. maßstäblich nivelliert werden, darf nicht mit der Fülle unterschiedlicher Objekte des Luftbildes verwechselt werden. Eine Segmentierung über Farbauszüge erscheint hier bisweilen so zielführend wie die Trennung diverser Obst- und Gemüsesorten über deren abweichende Temperaturen, um ein anschauliches Beispiel zu wählen. Hinzunahme neuer Thermometer ist hier so erfolgversprechend wie eine bessere Trennung lichter Waldbestände von Bodenvegetation durch Erhöhung der Meßkanalzahl. An eine Einzelbaumerkennung als Voraussetzung folgender Schadklassifikation über Signaturanalyse ist nicht zu denken.

In Erkenntnis der Notwendigkeit einer texturellen Objekterkennung vor weitergehender

Trennung der Repräsentanten einer Objektklasse nach Rückstrahlungseigenschaften, die vielen Objektklassen gemein sind, zeigt z.B. HAENEL (1986) verschiedene gedankliche Ansätze für die automatische Baumkronenerkennung auf, die auf Modellen eines zentralsymmetrischen Intensitätsabfalles der tiefpassgefilterten Krone mit Verfahren der Mittelpunkt- und Kronenrandsuche sowie Aststrahldetektion bei Fichten aufbauen. Der oben bereits vorgestellte "Generelle Operator Prozessor" von GRANLUND wird von HAENEL zwar ebenfalls genannt, reifte nach Aussage Herrn ECKSTEINS, eines seiner damaligen Mitarbeiter von der "Forschungsgruppe für wissensbasierte Systeme" am Institut für Informatik der TU München, jedoch nicht bis zur Implementation, weswegen dem Autor keine Ergebnisse bekannt sind.

Die gelungene Nachbildung komplexer Texturen in der Computergraphik mit Hilfe des Ray-Tracing (Strahlverfolgung) mag neue, bisher nicht gekannte Werkzeuge für eine adäquate Beschreibung natürlicher Oberflächenphänomene an die Hand geben, wie auch die Berechnung topographischer Modelle aus Stereobildern durch Erkennung der Höhenausdehnung von Objekten neue Möglichkeiten der Abgrenzung von Bäumen gegen Bestandeslücken, Buschwerk etc. eröffnet.

Ansätze über Fraktalmodellbildung und Nachahmung biologischer Entscheidungsstrukturen mittels neuronaler Netze sind relativ neu, etablieren sich jedoch ebenso in weiten Bereichen wie die Entwicklung assoziativer Systeme mit Vorwissen und Selbstkorrektur in der Erforschung künstlicher Intelligenz.

Ungeachtet des letztlich zielführenden Verfahrens werden zukünftige Technologien jedoch mit hoher Wahrscheinlichkeit auf eine Untersuchung von Nachbarschaftsbeziehungen ähnlich derjenigen der Organismen zwingend angewiesen sein.

Literatur

- ABELE, L. (1982): Statistische und strukturelle Texturanalyse mit Anwendungen in der Bildsegmentierung. Nachrichtentechnische Berichte 6. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik der Technischen Universität München. 142 S.
- BLAHUT, R. (1987): Fast Algorithms For Digital Signal Processing. (Reprinted With Corrections). Massachusetts-Wokingham-Amsterdam-Sydney: Addison Wesley. 442 S.
- BRACEWELL, R. (1986): The Fourier Transform And Its Applications. (Scd. Ed.). New York-London-Madrid-Montreal-Paris-Sydney: McGraw Hill. 474 S.
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A. (1991): Taschenbuch der Mathematik. (25. Auflage). Thun-Frankfurt/Main: Harri Deutsch. 823 S.
- BRONSTEIN, I. N.; SEMENDJAJEW, K. A. (1991): Taschenbuch der Mathematik Ergänzende Kapitel. Thun-Frankfurt/Main: Harri Deutsch. 234 S.
- EBERT, H. (1993): Transputer und Occam. Hannover: Heise. 781 S.
- GRANLUND, G. (1978): In Search Of A General Picture Processing Operator. In: Computer Graphics And Image Processing 8(1978): S. 155-173
- HABERÄCKER, P. (1991): Digitale Bildverarbeitung - Grundlagen und Anwendungen. (4. durchgesehene Auflage). München-Wien: Hanser. 404 S.
- HÄBERLE, G. et. al. (1991): Nachrichtentechnik. Nourney: Europa Lehrmittel. 400 S.
- HENNING, G.; SPITTEL, U. (1990): Einführung in die digitale Signalverarbeitung. Reihe Automatisierungstechnik 241. Berlin: Verlag Technik. 189 S.
- HAENEL, K.; TRAENKNER, H.; ECKSTEIN, W. (1987): Automatische Baumkronendeckung im Luftbild. Der Weg durch den Engpass. In: DFVLR Tagungsband zum 2. DFVLR Statusseminar 30.11.-02.12.1987. Untersuchung und Kartierung von Waldschäden mit Methoden der Fernerkundung. Oberpfaffenhofen. S. 53-66.
- HOARE, C. A. R. (Editor) (1990): Occam 2 Reference Manual. New York-London-Toronto-Sydney-Tokyo-Singapur: Prentice Hall. 133 S.
- INMOS (1990): Transputer Development System. (Scd. Ed.). New York-London-Toronto-Sydney-Singapur: Prentice Hall. 465 S.
- JAEHNE, B. (1991): Digitale Bildverarbeitung. (2. vollst. neubearb. Auflage). Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona-Budapest: Springer. 340 S.

- JAROSLAVSKIJ, L.P. (1990) : Einführung in die Digitale Bildverarbeitung. (2.Auflage). Heidelberg:Hüthig. 272 S.
- KLETTE, R.; ZAMPERONI, P. (1992) : Handbuch der Operatoren für die Bildbearbeitung. Braunschweig-Wiesbaden:Vieweg. 303 S.
- KOCH, B.; AMMER, U.; SCHNEIDER, T.; WITTMEIER, H. (1990): Spectroradiometer measurements in the laboratory and in the field to analyse the influence of different damage symptoms on the reflection spectra of forest trees. in: Int. J. of Remote Sensing 11(7) 1145-1163.
- KRONMÜLLER, H. (1991): Digitale Signalverarbeitung. Berlin-Heidelberg-New York-Paris-Tokyo-Hong Kong-Barcelona-Budapest: Springer. 505 S.
- KUEBLER, K.; AMMER, U.; REINARTZ, P.; FRANKEN, W. (1990): Erfahrungen beim Einsatz von Fernerkundungsdaten an der Baumart Kiefer. in: Forstw. Centralblatt 109. 341-354.
- LECHNER, W.; LOHL, N. (1990): Analyse digitaler Signale. Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg. 261 S.
- LIM, J.S. (1990): Two-Dimensional Digital Signal And Image Processing. London: Prentice Hall International. 694 S.
- LÜCKER, R. (1985): Grundlagen digitaler Filter . Nachrichtentechnik 7. Berlin-Heidelberg-New York-Paris-Tokyo: Springer. 264 S.
- MEYBERG, K.; VACHENAUER, P. (1990) : Höhere Mathematik 1. (1. korrig. Nachdr. 1990). Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong: Springer. 520 S.
- MEYBERG, K.; VACHENAUER, P. (1991) : Höhere Mathematik 2. Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo-Hong Kong: Springer. 457 S.
- NIEMANN, H. (1983): Klassifikation von Mustern. Berlin-Heidelberg: Springer. 340 S.
- OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R.W. (1989): Discrete Time Signal Processing. London: Prentice Hall International.
- PAVLIDIS, T. (1990) : Algorithmen zur Grafik und Bildverarbeitung. Hannover: Heise. 508 S.
- POUNTAIN, D.; MAY, D (Reprinted 1992): A Tutorial Introduction To Occam Programming. London-Edinburgh-Boston-Melbourne-Paris-Berlin-Wien: BSP Professional Books. 112 S.

- ROSENFELD,A.;KAK,A. (1981): Digital Picture Processing I.
San Diego-New-York-Berkeley-Boston-Tokyo-London-Sydney-Toronto:
Academic Press. 438 S.
- ROSENFELD,A.;KAK,A. (1981): Digital Picture Processing II.
San Diego-New-York-Berkeley-Boston-Tokyo-London-Sydney-Toronto:
Academic Press. 349 S.
- SCHRÜFER,E. (1992) : Signalverarbeitung. (2.Auflage). Hannover: Heise. 362 S.
- STÖCKER,H. Hrsg.(1992) : Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner
Verfahren. Thun-Frankfurt/Main: Harri Deutsch. 769 S.
- WAHL,F.M. (1989): Digitale Bildsignalverarbeitung . Nachrichtentechnik 13.
Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo-Hong Kong-London: Springer. 191 S.
- WIECZOREK,U. (1982): Methodische Untersuchungen zur Wattmorphologie aus
Luftbildern mit Hilfe eines Verfahrens der digitalen Bildstrukturanalyse. Münchner
Geographische Abhandlungen 27. München: Geobuch Verlag. 208 S.
- ZACHMANN,H.G. (1987): Mathematik für Chemiker.(2. Nachdruck der 4. Auflage).
Weinheim-Deerfield Beach: Verlag Chemie.
- ZAMPERONI,P.(1991): Methoden der digitalen Bildsignalverarbeitung.
(2. überarbeitete Auflage). Braunschweig-Wiesbaden: Vieweg. 264. S.

ANHANG A: Programmbeispiel in OCCAM

1-dimensionale FAST-FOURIER-TRANSFORM :

übergebene Werte: n: Anzahl der Stützstellen
 pot: $\log_2 n$
 re, im: Real- und Imaginärteile der Funktionswerte

```

PROC FFT(INT n, pot, []REAL32 re, im)
  INT i, k, l, m, n1, n2 :
  REAL32 re.dum, im.dum, argument, angle,
  co, si :

  SEQ

  n2 := n
  SEQ ct=0 FOR pot
  SEQ
    n1:=n2
    n2:=n2/2
    angle:=0.0(REAL32)
    argument:=(2.0(REAL32)*Pi)/(REAL32 ROUND n1)
    SEQ j=0 FOR n2
      SEQ
        co:=COS(angle)
        si:=-SIN(angle)
        i:=j
        WHILE i<n
          SEQ
            l:=i+n2
            re.dum:=re[i]-re[l]
            re[i]:=re[i]+re[l]
            im.dum:=im[i]-im[l]
            im[i]:=im[i]+im[l]
            re[l]:=(re.dum*co)-(im.dum*si)
            im[l]:=(im.dum*co)+(re.dum*si)
            i:=i+n1
          angle:=(REAL32 ROUND(j+1))*argument
        j:=j+1
    m:=0
    SEQ i=0 FOR n-1
      SEQ
        IF
          (i<m)
            SEQ
              re[m], re[i]:=re[i], re[m]
              im[m], im[i]:=im[i], im[m]
            TRUE

```

```
        SKIP
      k:=n/2
    WHILE (k<(m+1))
      SEQ
        m:=m-k
        k:=k/2
      m:=m+k

    SEQ i=0 FOR n
      SEQ
        re[i]:=re[i]/(REAL32 ROUND n)
        im[i]:=im[i]/(REAL32 ROUND n)
```

:

